1. Übung Math. II Chemie

a) Taylorformel für $n=3$ und Entwicklungsstelle x_0:
f mindestens 4mal stetig diffbar auf $(a,b)=I$ mit $x_0 \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + R_3$$

mit $P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$

und $R_3 = \frac{f^{(4)}(x_0+\delta(x-x_0))}{24}(x-x_0)^4$, mit $0<\delta<1$.

$f(x) = \ln(\frac{x}{2}) = \ln x - \ln 2$ für $x>0$ und $x_0=2$

Für P_3 werden $f^{(j)}(x_0)$ für $j=0,1,2,3$ benötigt
$f^{(4)}$ für das Restglied

$f(2)=0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Taylorpolynom 3. Grades:

$P_3(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3$

Wegen $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ gilt für das Resglied

$R_3 := -\frac{6}{24(2+\delta(x-2))^4}(x-2)^4$ und damit

$|f(x) - P_3(x)| = |R_3| = \frac{1}{4}\frac{|x-2|^4}{|2+\delta(x-2)|}$. Mit $x \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ und $0<\delta<1$ folgt, indem der Zähler für diese Werte maximal, der Nenner minimal gewählt wird.

$|R_3| \le \frac{1}{4}\frac{(\frac{1}{2})^4}{(\frac{3}{2})^4} = \frac{1}{4 \cdot 3^4} < 4 \cdot 10^{-3}$

2) Mit $f(x) = \ln x - \ln 2$ gilt $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{x^k}(k-1)!$
für $k=1,2,..$ Nachweis induktiv:

1 für $k=1$ ist $f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{1+1}}{x^1} \cdot 0!$ ✓

2. Es gelte $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{x^k}(k-1)!$ für ein $k \ge 1$

$\Rightarrow f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)! \frac{d}{dx} x^{-k} = (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)x^{-k-1}$

$\Rightarrow f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1+1}(k+1-1)!\, x^{-k-1}$ ✓

Damit ist $f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{2^k}$ und damit ($f(2)=0$)

$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(2)}{j!}(x-2)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j \cdot 2^j}(x-2)^j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (x-2)^j$, $a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{2^j \cdot j}$

wegen $\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty} \frac{2^j j}{2^{j+1}(j+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 2$ (Konvergenzradius)

3a) $\int (x^3 - \sin(2x))dx = \int x^3 dx - \int \sin(2x) dx$

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$
$dx = \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{4}x^4 - \int \sin(u) \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\int \sin u \, du = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cos u + c \qquad ((\cos u)' = -\sin u$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cos(2x) + c$

b) $\int x e^{-2x} dx$ Hier wird partielle Integration mit $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

angewendt

$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

$\Rightarrow \int \underset{f}{x} \underbrace{e^{-2x}}_{g'} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x - \int 1 \cdot (-\frac{1}{2}e^{-2x}) dx$

$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}[2x+1] + c$

c) $\int \ln(1+x^2) dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underbrace{\ln(1+x^2)}_{f} dx$ (part. Integr.)

$f(x) = \ln(1+x^2) \qquad g'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad g(x) = x$

$\Rightarrow$

$\int 1 \cdot \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$

$= x \ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \ln(1+x^2) - 2\int (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx$

$= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + c.$