1.Aufgabenblatt Mathematik III für Bauingenieure, Master 13.04.2015

Abgabe Mo. 27.04.2015 , 12.15 Uhr vor der Vorlesung

1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme .

   $a)$ $(2x-y)y' = 2y - 4x + 4 \ , \qquad y(1) = 0$

   $b)$ $2xyy' = y^2 - x^2 \ , \qquad y(1) = 1$

   $c)$ $(x^2-1)y' = xy^2 + x + y^2 + 1 \ , \qquad y(2) = 0$

   $d)$ $y'cosx + ysinx = cos^2 x \ , \qquad y(\frac{\pi}{4}) = 1 \ .$

   [2,2,2,2]

2. Bestimmen Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems
$$y' = \sqrt[3]{y-x} + 1 \ , \ y(1) = 1 \ .$$
   [3]

3. Untersuchen Sie folgenden Anfangswertprobleme auf Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

   $a)$ $y' = y^2 + (1-x^4)^{-2} \ , \quad y(0) = 0$ $\quad b)$ $(x+1)^2(y')^4 + y^2 + 2 = 0 \ , \quad y(0) = 0$

   c) $xy' = 2y \ , \qquad y(0) = 0 \ .$

   [2,2,2]

4. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem
$$y' = e^y \tanh(y-x) \ , \ y(1) = 1$$
   genau eine Lösungskurve besitzt. [3]

5. Berechnen Sie für das Anfangswertproblem
$$y' = f(x,y) = x + y \quad , \quad y(0) = 0$$
   a) die iterative Funktionenfolge
$$y_{n+1} = \int_0^x f(t, y_n(t))dt \quad , \quad y_0(x) \equiv 0$$
   sowie ihren Grenzwert $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$,

   b) die Lösung direkt. [2,2]

1. Übung Math. III Bauingenieure SS 15

1. a) $(2x-y)y' = 2y-4x+1$ Substitution $y-2x=u$

$\Rightarrow y' = u'+2 \Rightarrow -u(u'+2) = 2u+1 \Rightarrow uu' = -(4u+1)$

$\Rightarrow u\frac{du}{dx} = -(4u+1) \Rightarrow \frac{u}{4u+1}du = -dx \Rightarrow_{u \neq -\frac{1}{4}} \frac{1}{4}\int \frac{u}{u+\frac{1}{4}}du = -\int dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{4}\frac{1}{u+\frac{1}{4}}\right)du = -dx \Rightarrow u - \frac{1}{4}\ln|u+\frac{1}{4}| = -4x+c$ $u = -\frac{1}{4}$ weitere Lsg.

Rücksubst. $u = y-2x \Rightarrow y - \frac{1}{4}\ln|y-2x+\frac{1}{4}| = -2x+c$

$y(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}\ln\frac{7}{4} = -2+c \Rightarrow c = 2 - \frac{1}{4}\ln\frac{7}{4}$ ($u = -\frac{1}{4} \Rightarrow y-2x = -\frac{1}{4}$ erf. AW nicht)

b) $2xyy' = y^2-x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$, Subst $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu$

$y' = u + xu' = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{2u}(u^2+1)$

$\Rightarrow \frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u^2+1) = -\frac{1}{2}\ln|x| + c_1$

$\Rightarrow e^{\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}\ln|x|} = e^{c_1} \Rightarrow \sqrt{|x|}(u^2+1) = c$, Rücksubst

$\sqrt{|x|}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = c$ $y(1) = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 2|x|^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{2|x|^{\frac{3}{2}} - x^2}$

c) $(x^2-1)y' = (y^2+1)(x+1) \Rightarrow (x+1)(x-1)y' = (y^2+1)(x+1)$

$\Rightarrow (x-1)y' = y^2+1 \Rightarrow (x-1)\frac{dy}{dx} = y^2+1 \Rightarrow$

$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \arctan y = \ln|x-1| + c$

$\Rightarrow y = \tan(\ln|x-1| + c)$ $y(2) = \tan c = 0$ o.E. $c = 0$

$y = \tan(\ln|x-1|)$

d) Normierung $y' + \frac{\sin x}{\cos x}y = \cos x$ Lineare Dgl. 1. Ordnung

Lösung $y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}}\left[\int \cos x \, e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}dx + c\right]$

$\Rightarrow y = \cos x[x+c]$ $y(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{\pi}{4}+c] \Rightarrow c = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

2) $y' = \sqrt[3]{y-x} + 1$ Subst. $u = y-x \Rightarrow y' = u'+1 \Rightarrow$

$u' = \frac{du}{dx} = u^{\frac{1}{3}} \Rightarrow u^{-\frac{1}{3}}du = dx$ $u \neq 0$ $\int u^{-\frac{1}{3}}du = \int dx$

$\Rightarrow \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} = x - c \Rightarrow u = \left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = x + \left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{\frac{3}{2}}$ $x \geq c$

aber auch $u \equiv 0$, also $y = x$ ist Lösung.

$\Rightarrow y = \begin{cases} x & \text{für } x \leq c \\ x + \left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{\frac{3}{2}} & \text{für } x \geq c \end{cases}$ erfüllen für jedes $c \geq 1$

das AWP $y(1) = 1$

3) a) Da die Funktion $f(x,y) = y^2 + (1-x^4)^{-2}$ ist in dem Parallelstreifen $S = \{(x,y) \mid -1 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$ stetig und stetig partiell nach y diffbar $\Rightarrow$ f genügt auf S einer lokalen Lipschitz-Bed. $\Rightarrow$ das AWP $y' = f(x,y)$ besitzt in S genau eine Lösung

b) $(x+1)^2 (y')^4 + y^2 + 2 = 0$, $y(0) = 0$. Das AWP besitzt keine reelle Lösung da $y'(0)^4 + 2 = 0$ in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist.

c) $xy' = 2y$ $\quad \cancel{x}\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|y| = 2\ln|x| + c_1 \Rightarrow y = c_2 x^2$ wobei $c_2 \in \mathbb{R}$ bel.

Alle diese Lösungen erfüllen $y(0)=0$ ∞-viele Lös.

4) Die Funktion $f(x,y) = e^y \cancel{\tan}(y-x)$ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig und stetig partiell nach y diffbar $\Rightarrow$ $f(x,y)$ erfüllt eine Lokale Lipschitzbedingung $\Rightarrow$ Satz von Pikard-Lindelöf: $\exists$ genau eine Lösung des AWP's.

5.) Wegen $y(0)=0$ ist das AWP $y' = f(x,y)$ $y(0)=0$ äquivalent zu

$y(x) = \int_0^x f(t, y(t))\,dt$. Sei $y_0 \equiv 0$ $\quad y_{n+1}(x) = \int_0^x (t + y_n(t))\,dt$

$\Rightarrow y_1(x) = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$, $\quad y_2(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2)\,dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3$

$y_3(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2\cdot 3}t^3)\,dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

Beh. $\quad y_n(x) = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x^j}{j!}$ $\quad$ Bew. induktiv

Für $n=1$ ist $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 = \sum_{j=2}^{2} \frac{x^j}{j!}$ ✓

Annahme die Beh. gelte für ein $n \geq 1$ $\Rightarrow$

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x [t + y_n(t)]\,dt = \int_0^x \Big(t + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{t^j}{j!}\Big)dt = \frac{1}{2!}x^2 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!}$$

$\Rightarrow y_{n+1}(x) = \sum_{j=2}^{n+1+1} \frac{x^j}{j!}$ ✓ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = y(x)$

$\Rightarrow y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} - 1 - x = e^x - 1 - x$

Lösung direkt: $\quad y' - y = x$ $\quad$ Lin. Dgl. 1. Ordnung

$y = e^{\int dx}\left[\int x e^{-\int dx} dx + c\right] = e^x\left[\int x e^{-x} dx + c\right]$

$= e^x\left[-(1+x)e^{-x} + c\right] = ce^x - 1 - x$ $\quad$, $y(0) = c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow y = e^x - 1 - x$