Lösungen 1. Übung Math. I Chemie

1) a) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$D = \{7, 14\}$

b) $(B \cup C) \cap D = \{14\}$

c) $B^C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$B \setminus C = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}$

2.) f ist weder injektiv noch surjektiv, da Urbild von c $\{a, c\}$ und $a \notin$ Bild f ist.

g ist bijektiv

h ist keine Funktion von $A \to B$, da $c \notin B$ ist.

w ist surjektiv, aber nicht injektiv.

3) a) Wegen $a^2b^3 + 2b^2a + b = b(a^2b^2 + 2ab + 1) = b(ab+1)^2$

und $(a^2b - a)^2 + 4a^3b = a^4b^2 - 2a^3b + a^2 + 4a^3b = a^4b^2 + 2a^3b + a^2 =$

$= a^2(a^2b^2 + 2ab + 1) = a^2(ab+1)^2$ folgt

$$\frac{\sqrt{a^2b^3 + 2b^2a + b}}{(a^2b - a)^2 + 4a^3b} = \frac{\sqrt{b(ab+1)^2}}{a^2(ab+1)^2} = \frac{\sqrt{b}\,|ab+1|}{a^2\,|ab+1|^2} = \frac{\sqrt{b}}{a^2\,|ab+1|}$$

b) $$\frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{x(1+x)} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right] = \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{2x}{x(1-x)(1+x)} - \frac{2}{x(1-x)(1+x)} = \frac{2(x-1)}{x(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{x(x+1)}$$

4a) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-5} = \sqrt{x} - 1 \underset{\text{quadr.}}{\not\Leftrightarrow} x - 5 = (\sqrt{x} - 1)^2$

$\Rightarrow x - 5 = x - 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \underset{\text{quadr}}{\not\Leftrightarrow} x = 9$

Da die Gleichung quadriert wurde, ist Lösungsmenge der quadrierten Gleichung eventuell größer als die Ausgangsgleichung, also ist eine Probe nötig

$\sqrt{9} - \sqrt{9-5} = 3 - 2 = 1$ ✓

b) Wegen $x + 2 < x + 4 \Rightarrow \sqrt{x+4} > \sqrt{x+2} \quad \forall\, x \geq 0$

Damit ist $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} < 0$ aber $\sqrt{x} \geq 0$, also ist

$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x}$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.

5) a) $\frac{2x-1}{1+x} > x-1$, $x \neq -1$! Um nach x auflösen zu können, muß man die Ungleichung mit $x+1$ multiplizieren, deshalb müssen die Fälle I: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ und II: $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ gesondert betrachtet werden, da im Fall I die Ungleichung erhalten bleibt, im Fall II die Ungleichung umgekehrt wird.

Fall I $\quad \frac{2x-1}{x+1} > x-1 \;\Big|\; \underbrace{(x+1)}_{>0} \Leftrightarrow 2x-1 > (x+1)(x-1) = x^2-1$

$\Leftrightarrow 2x > x^2 \Leftrightarrow x^2-2x<0 \Leftrightarrow x(x-2)<0 \Leftrightarrow \{0<x<2\} = L_I$

Fall II $\quad \frac{2x-1}{x+1} > x-1 \;\Big|\; \underbrace{(x+1)}_{<0} \Leftrightarrow 2x-1 < x^2-1 \Leftrightarrow x(x-2) > 0$

ist für alle $x<-1$ erfüllt. $\Rightarrow L_{II} = \{x<-1\}$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{x \mid (x<-1) \vee (0<x<2)\}$

b) $\left|\frac{x+3}{x+1}\right| = \frac{|x+3|}{|x+1|} < 1$! $x \neq -1 \Rightarrow |x+1|>0$ Also gilt

$\frac{|x+3|}{|x+1|} < 1 \Leftrightarrow |x+3| < |x+1|$ wegen $|x-x_0|$ = Abstand von x zu x_0 $\Rightarrow$ Abstand von x zu -3 ist kleiner als Abstand von x zu -1 $\Rightarrow x<-2$ $\Rightarrow L = \{x \mid x<-2\}$

c) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+3x+3}{(x+2)(x+1)} \leq 1$ und ($x>-1$

$\Rightarrow (x+2)(x+1)>0$) $\Rightarrow$ Ungl.: $x^2+3x+3 \leq (x+2)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3 \leq x^2+3x+2 \Leftrightarrow 1 \leq 0$ falsch $\Rightarrow L = \{\} = \emptyset$