Übungsklausur in Mathematik für Chemiker am 08.06.2017

Name:	**Vorname:**	**Matr.Nr.:**
Punkte:	**Note:**	**Bonuspunkte:**

1. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$a) \quad \int x^2 \ln(x)\, dx \qquad b) \quad \int \frac{1}{x^2+3x-4}\, dx$$

[4+4]

2. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$a) \quad \int_0^2 x \sin(x^2)\, dx \qquad b) \quad \int_{-2}^2 \sin(x^3)\, dx\ .$$

.

[4+2]

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1,1,-1)$, $\vec{b} = (t,2,2-t)$ und $\vec{c} = (2,2,-t)$. Bestimmen Sie alle $t \in \mathrm{R}$ für welche
   a) die Vekroren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind,
   b) der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms minimal ist.

[4+4]

4. Berechnen Sie zu den in Normalform gegebenen Ebenen E_1 , E_2 im R^3

$$E_1 : x - y + z + 1 = 0$$

$$E_2 : -x + 2y - 2z - 2 = 0$$

die Schnittgerade und den Schnittwinkel. .

[3+3]

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[6]

[ ]: Maximal erreichbare Punktzahl.

Übungsklausur Math. für Chemie 08.06.2017

1) a) $J := \int x^2 \ln x \, dx$ Partielle Integration $\int u'v\,dx = uv - \int uv'dx$

$u' = x^2 \quad v = \ln x \Rightarrow u = \frac{1}{3}x^3, v' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow J = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}) + c$

b) $J = \int \frac{1}{x^2+3x-4}dx$ Partialbruchzerlegung

$x^2+3x-4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+3x-4} = \frac{1}{(x-1)(x+4)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+4} \Rightarrow 1 = a(x+1) + b(x+4)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{5} \Rightarrow J = \frac{1}{5}\int(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4})dx = \frac{1}{5}(\ln|x-1| - \ln|x+4|) + c$

$\Rightarrow J = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right| + c, \; x \neq 1, -4.$

2 a) $\int_0^2 x \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(x^2)\, 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sin u\,du$

$u = g = x^2 \quad g'(x) = 2x$

$x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad x = 2 \Rightarrow u = 4$

$= \frac{1}{2} -\cos u\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(1 - \cos 4)$

b) Wegen $\sin(-x)^3 = -\sin(x^3)$ folgt $\int_{-2}^{2} \sin(x^3)dx = 0$

3 a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ t & 2 & 2-t \\ 2 & 2 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ t & 2 & 2-t \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} = (2-t)^2 \Leftrightarrow t = 2$

b) Flächeninhalt $F = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 2-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t \\ -2 \\ 2-t \end{pmatrix}$

$F = \|(4-t, -2, 2-t)\| = \sqrt{(4-t)^2 + 2^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 12t + 24} =$
$\sqrt{2}\sqrt{(t-3)^2 + 3}$ wird genau für $t = 3$ minimal.

4) $E_1: \; x - y + z + 1 = 0$
$E_2: \; -x + 2y - 2x - 2 = 0$ $\}+ \Rightarrow \; y - z - 1 = 0$ wähle $z = t$

$\Rightarrow y = t + 1 \quad x = y - z - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Gleichung der Schnittgeraden:

$(x, y, z) = (0, t+1, t) = (0, 1, 0) + t(0, 1, 1) \quad t \in \mathbb{R}$

Schnittwinkel: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$ $\quad n_1 = (1, -1, 1)$, $n_2 = (-1, 2, -2)$

$\Rightarrow \vec{n}_1 \vec{n}_2 = -5 \quad \|\vec{n}_1\| = \sqrt{3} \quad \|\vec{n}_2\| = 3 \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{5}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}2756$ in Bogenmaß

5) Eigenwerte von A: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 4 \quad \lambda_2 = -1$ Eigenräume

$\lambda_1 = 4 \quad (A - 4E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow E_4 = \langle (3, 2) \rangle$

$\lambda_2 = -1 \quad (A + E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow E_{-1} = \langle (1, -1) \rangle$