2. Übung Math. I Chemie

1 a) $2x + 4 = -1 + 3x \quad | + (1 - 2x) \iff 5 = x$

b) $\dfrac{3}{2x+1} + 2 = 0 \iff 3 = -2(2x+1) = -4x - 2 \iff 4x = -5$
$(x \neq -\frac{1}{2}) \qquad \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$

c) $2x^2 - 4x + 1 = x^2 + 5x + 7 \iff x^2 - 9x - 6 = 0$ p,q-Formel

$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 6} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{105}{4}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{105});\ x_2 = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{105})$

d) $x - 7 = \dfrac{5}{-x+1} \quad (x \neq 1) \Rightarrow (x-7)(1-x) = 5 \Rightarrow -x^2 + 8x - 7 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2 \quad x_1 = 6,\ x_2 = 2$

e) $4x^2 + 8ax = 4 \Rightarrow x^2 + 2ax = 1 \Rightarrow (x+a)^2 = 1 + a^2$

$\Rightarrow x = -a \pm \sqrt{1 + a^2}$

2 a) Zu zeigen ist: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{n+1}{n+2}$ für alle $n = 0, 1, \ldots$

Induktionsbeweis:

I. Induktionsanfang: Nachweis für $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{0+2} \checkmark$$

II Induktionsannahme: Die Gleichung gelte für irgendein $n \geq 0$, also $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{n+1}{n+2}$ sei für dieses n wahr.

III Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass die Gleichung dann auch für $n+1$ gilt;

Für dieses n ist dann

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}}_{= \frac{n+1}{n+2} \text{ (Induktionsannahme)}} + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2} = \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad (\text{wegen } (n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{n+2}\left(n + 1 + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{(n+2)(n+3)}\left((n+1)(n+3) + 1\right)$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)}(n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1+1}{n+1+2}$$

Damit gilt die Gleichung auch für $n+1$, also auch für alle $n \geq 0$.

2b) Beh: $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)=\frac{2}{n^2+n}$ für alle $n=2,3,\ldots$

Induktionsbeweis:

I $n=2$: Dann ist $\prod_{j=2}^{2}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2^2+2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Beh. gilt für $n=2$.

II In. Annahme: $(*)$ $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)=\frac{2}{n^2+n}$ gelte für irgendein $n\geq 2$.

III Induktionsschluss: Dann erhält man für dieses n:

$$\prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)=\underbrace{\left(\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)\right)}_{=\frac{2}{n^2+n}}\cdot\left(1-\frac{2}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)=\frac{2}{n(n+1)}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n+2-2}{n+2}=$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{(n+1)^2+n+1}.$$

3a) Geometrische Summenformel: Für $q\neq 1$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n}q^j=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

wegen $(-1)^j\,3^{\frac{j-1}{2}}=-(-1)^{j-1}(\sqrt{3})^{j-1}=-(-\sqrt{3})^{j-1}$ gilt

$$s=\sum_{j=1}^{20}(-1)^j\,3^{\frac{j-1}{2}}=-\sum_{j=1}^{20}(-\sqrt{3})^{j-1}\underset{(\ell=j-1)}{=}-\sum_{\ell=0}^{19}(-\sqrt{3})^{\ell}\underset{q=-\sqrt{3}}{=}-\frac{1-(-\sqrt{3})^{20}}{1-(-\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow s=-\frac{1-3^{10}}{1+\sqrt{3}}$$

b) $$\prod_{k=2}^{21}\frac{k+1}{k-1}=\frac{\prod_{k=2}^{21}(k+1)}{\prod_{k=2}^{21}(k-1)}=\frac{\prod_{j=3}^{22}j}{\prod_{j=1}^{20}j}=\frac{21\cdot 22}{1\cdot 2}=21\cdot 11=231$$