3. Übung Math. I Chemie WS 16/17

1a) $\binom{9}{0}=\binom{9}{9}=1$, $\binom{9}{1}=\frac{9!}{8!\,1!}=9=\binom{9}{8}$

$\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=4\cdot 9=36=\binom{9}{7}$ $\binom{9}{3}=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\,3!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}=84$

$\binom{9}{4}=\binom{9}{5}=\frac{9!}{4!\,5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}=9\cdot 14=126$

b) $S=\sum_{k=1}^{22}-2^{-k}\binom{22}{k}=-\sum_{k=1}^{22}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1^{22-k}\binom{22}{k}=-\sum_{k=0}^{22}\left(\frac{1}{2}\right)^k 1^{22-k}\binom{22}{k}+1$

Anwendung der binomischen Formel

$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$ mit $n=22$, $a=\frac{1}{2}$, $b=1$

ergibt:

$S=-\left(\frac{3}{2}\right)^{22}+1$

2.

a) $z_1(z_2-z_4)=(2-i)(-3+4i-4-3i)=(2-i)(-7-i)=$

$=-14+i^2+i(7-2)=-15+5i$

b) $|z_2 z_3|=|z_2||z_3|=|-3+4i||1+2i|=\sqrt{9+16}\sqrt{1+4}=5\sqrt{5}$

c) $\frac{z_2 z_4}{z_1}=\frac{1}{|z_1|^2}\cdot z_2\cdot z_4\,\overline{z}_1=\frac{1}{5}(-3+4i)(4+3i)(2+i)=-13-6i$

d) $a+ib=\sqrt{z_2} \Leftrightarrow (a+ib)^2=a^2-b^2+2abi=z_2=-3+4i$

$\Leftrightarrow a^2-b^2=-3 \wedge 2ab=4$ Aus $a\cdot b=2 \Rightarrow b=\frac{2}{a}$

$\Rightarrow a^2-\frac{4}{a^2}=-3 \Rightarrow (a^2)^2+3a^2-4=0 \Rightarrow a^2=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+4}$

$\Rightarrow a^2=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1 \Rightarrow a=\pm 1$; wegen $b=\frac{2}{a} \Rightarrow$

$\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i)$

3 a) Notwendig ist $z\neq 0$; $2z+\frac{10}{z}=-5-6i \quad |\cdot z \Leftrightarrow$

$2z^2+(5+6i)z+10=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{1}{2}(5+6i)z+5=0$

$\Leftrightarrow$ (p,q-Formel) $z=-\frac{1}{4}(5+6i)+\sqrt{\left(\frac{1}{4}(5+6i)\right)^2-5}$

Berechnung der Wurzel $\left(\left(\frac{1}{4}(5+6i)\right)^2-5=\frac{1}{16}(-91+60i)\right)$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{4}(5+6i)\right)^2-5}=\frac{1}{4}\sqrt{-91+60i}$

$a+ib=\sqrt{-91+60i} \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=-91+60i$

$\Rightarrow a+ib=\pm(3+10i) \Rightarrow z=-\frac{1}{4}(5+6i)\pm\frac{1}{4}(3+10i)$

$z_1=-\frac{1}{2}+i \qquad z_2=-2-4i$

b) $6z^2 + (4+3i)z + 1+7i = 0$

$\Rightarrow z^2 + \frac{1}{6}(4+3i)z + \frac{1}{6}(1+7i) = 0$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{12}(4+3i) + \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2(4+3i)^2 - \frac{1}{6}(1+7i)}$

$= \frac{1}{12}\left[-4-3i + \sqrt{(4+3i)^2 - 24(1+7i)}\right]$

Berechnung der Wurzel $w = \sqrt{(4+3i)^2 - 24(1+7i)}$

$\Rightarrow w = \sqrt{-17-144i} = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -17 - 144i$

$\Leftrightarrow (I)\ \alpha^2 - \beta^2 = -17 \ \wedge\ 2\alpha\beta = -144\ (II)$

Aus (II) folgt $\beta = -\frac{72}{\alpha}$ und damit aus (I):

$\alpha^2 - \frac{72^2}{\alpha^2} = -17 \Rightarrow (\alpha^2)^2 + 17\alpha^2 - 72^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 = -\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{17^2}{4} + 72^2} = \frac{1}{2}\left(-17 + \sqrt{17^2 + 144^2}\right) = 64$

$\Rightarrow \alpha = \pm 8, \beta = \mp \frac{72}{8} = \mp 9 \Rightarrow w = \pm(8-9i)$

$\Rightarrow z = \frac{1}{12}\left[-4-3i \pm (8-9i)\right] \Rightarrow z_1 = \frac{1}{3} - i, z_2 = -1 + \frac{i}{2}$

c) Mit $z = x+iy$ gilt: $|z-2i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Re(iz) = \Re(ix - y) = -y \Rightarrow$ (In die Ungl. eingesetzt)

$\sqrt{x^2+(y-2)^2} \geq -y$.

Da $\sqrt{x^2+(y-2)^2} \geq 0$ gilt, ist die Ungleichung für alle x und $y \geq 0$ schon erfüllt.

Also ist nur der Fall $y<0$ noch zu untersuchen

Dann ist aber $\sqrt{x^2+(y-2)^2} \geq |y| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \geq y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 \geq y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4y \leq x^2 + 4 \Leftrightarrow y \leq \frac{x^2}{4} + 1$ Das ist aber für alle $y<0$ und $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

$\Rightarrow$ Die Ungleichung gilt für alle $z \in \mathbb{C}$