5. Übung Math. I für Chemie WS 16/17

1)
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

2) Es ist
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow A^{-1}$ ex. Matrix der Adjunkten von A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T = -\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.) Das homogene LGS $(A - tE)\vec{x} = \vec{0}$ besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $\det(A-tE) = |A-tE| = 0$ gilt

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} 3-t & 3 & -2 \\ 2 & 7-t & -2 \\ -2 & -2 & 3-t \end{vmatrix} \underset{3.\,Sp - 1.\,Sp}{=} \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 1-t \\ 2 & 7-t & 0 \\ -2 & -2 & 1-t \end{vmatrix} \underset{1.\,Z. - 3.\,Z.}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-t & 5 & 0 \\ 2 & 7-t & 0 \\ -2 & -2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 5-t & 5 \\ 2 & 7-t \end{vmatrix} = (1-t)\left[(5-t)(7-t) - 10\right]$$

$$= (1-t)(t^2 - 12t + 25) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \ \vee \ t^2 - 12t + 25 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 1 \ \vee \ t = 6 \pm \sqrt{36-25} \quad \Rightarrow \text{Lösungen: } t_1 = 1,\ t_2 = 6 - \sqrt{11},\ t_3 = 6 + \sqrt{11}$$

4) Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystem ist die Matrix A aus Aufgabe 1): Mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $A\vec{x} = \vec{b}$ und da $|A| = -12 \neq 0$ ist, ist die Cramersche Regel anwendbar:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}|A_1| = \frac{-1}{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} -\frac{1\cdot(-1)}{12}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}|A_2| = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 2. Sp.}}{=} -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}|A_3| = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{|A|}|A_4| = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$