6.Aufgabenblatt Mathematik IIIa für Elektrotechnik 10.01.2015

Abgabe: bis Do. 24.01.2015 .10^{15} Uhr .

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$.

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx$.

   [3,3]

2. Berechnen Sie die Laplacetransformierte zur Funktion $f(t)$ mit

   a) $f(t) = 1$, *wenn* $t \in [0, 1)$, $0 < b$
   und $f(t) = 0$ sonst.

   b) $f(t) = 0$, *wenn* $t < 0$
   und $f(t) = 1$, *wenn* $t \in [0, 1)$, $f(t+k) = (-1)^k f(t)$, $t \in [0, 1)$, $k \in \mathrm{N}$.

   [3,3]

3. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Anfangwerprobleme

   a) $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   b) $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $f(t)$ wie in 2b) definiert. .

   c) $x'' - 2x' + 2x = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, wobei $\delta(t)$ die Dirac sche Deltadistribution ist.

   [2,3,3]

6. Übung Math. III a ET WS 14/15

1) Da sowohl $\sqrt{z}$ als auch $Ln(z)$ bei 0 nicht holomorph aber jeder Zweig in dem durch $G_{\varsigma,R} = \{z \mid \varsigma < |z| < R,\ 0 < \arg z < 2\pi\}$ definiertem Gebiet für alle $\varsigma > 0$, $R > \varsigma$ holomorph sind gilt mit $\Gamma_{\varsigma,R}$ der positiv orientierte Rand von $G_{\varsigma,R}$; aus dem Residuensatz:

a)

$$2\pi i \sum_{z \in G_{\varsigma,R}} \operatorname{Res} f(z) = \int_{\Gamma_{\varsigma,R}} f(z)\,dz$$, mit $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$. f besitzt als einzige Singularitäten die einfachen Polstellen $z = \pm i$ in $G_{\varsigma,\Gamma}$. Damit ist

$$2\pi i\{\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i)\} = \int_{\Gamma_{\varsigma,R}} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\,dz = \int_{\varsigma}^{R} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx + \int_{R}^{\varsigma} \frac{-\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{\varsigma^{\frac12} e^{i\frac{\nu}{2}} i e^{i\nu}\varsigma\,d\nu}{\varsigma^2 e^{2i\nu}+1} + \int_0^{2\pi} \frac{R^{\frac12} e^{i\frac{\nu}{2}} iRe^{i\nu}}{R^2 e^{i2\nu}+1}\,d\nu .$$

Kreis math. negat. durchl.

Für $\varsigma \to 0$ und $R \to +\infty$ erhält man, da die Integrale über die Kreise gegen Null gehen:

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\{\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i)\}$$

(Hauptzweig der Wurzel!)

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{\sqrt{z}}{z+i} = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\cdot\frac{1}{2i}$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{\sqrt{z}}{z-i} = \frac{\sqrt{-i}}{-2i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)\frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{2\pi i}{\sqrt{2}\,4i}\left[1+i-(i-1)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b) Um das Integral $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx$ zu berechnen, geht man von dem Integral

$$\int_{\Gamma_{\varsigma,R}} \frac{Ln^2(z)}{z^2+4}\,dz$$ aus, wobei wieder $\Gamma_{\varsigma,R}$ wie unter a) gewählt ist und $Ln(z)$ der Hauptzweig des Logarithmus d.h. $Ln(z) = \ln x$ wenn $z = x \in \mathbb{R}$

Da $\frac{Ln^2(z)}{z^2+4} = f(z)$ wieder holomorph in $G_{\varsigma,R} \setminus \{\pm 2i\}$ ist gilt

$$\int_{\Gamma_{\varsigma,R}} \frac{Ln^2(z)}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res} f(2i) + \operatorname{Res} f(-2i)\right]$$ wenn $\varsigma < 2 < R$

$\Rightarrow$

$$2\pi i[\operatorname{Res} f(2i)+\operatorname{Res} f(-2i)] = \int_\delta^R \frac{(\ln x)^2}{x^2+1} - \int_\delta^R \frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^2+1}dx$$
$$-\int_0^{2\pi}\frac{(\ln \delta+i\vartheta)^2}{\delta^2 e^{2i\vartheta}+4} i\delta e^{i\vartheta} d\vartheta + \int_0^{2\pi}\frac{(\ln R+i\vartheta)^2}{R^2e^{2i\vartheta}+4} iRe^{i\vartheta}d\vartheta$$

Da die Integrale über die Kreise für $\delta\to 0$ und $R\to+\infty$ gegen 0 gehen, erhält man

$$2\pi i[\operatorname{Res}(f(2i))+\operatorname{Res}(f(-2i))] = -4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+4}dx + 4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

Wegen $\operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\ln^2(z)}{z+2i} = \frac{(\ln 2+\frac{\pi}{2}i)^2}{4i}$

$\operatorname{Res} f(-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)f(z) = \lim_{z\to -2i}\frac{\ln^2(z)}{z-2i} = \frac{(\ln 2+\frac{3}{2}\pi i)^2}{-4i}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi i}{4i}\left[(\ln 2+\tfrac{i}{2}\pi)^2-(\ln 2+\tfrac{3}{2}\pi i)^2\right] = -4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+4}dx + 2\pi^3$$

$$\Rightarrow \pi\left[i\pi\ln 2-\frac{\pi^2}{4}-3\pi i\ln 2+\frac{9}{4}\pi^2\right] = -4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+4}dx+2\pi^3$$

$$\Rightarrow 4\pi i\, J = 2\pi^2 i\ln 2 \quad\Rightarrow J = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2$$

2a) $\mathcal{L}(f) = \int_0^1 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{s}(1-e^{-s})$

b) $\int_k^{k+1} e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{s}(-1)^k\left[e^{-st}\right]_k^{k+1}$

$= -\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[e^{-s(k+1)}-e^{-sk}\right] = \frac{1}{s}(1-e^{-s})\sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-s})^k \quad , \quad s>0$

$= \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$

3a) Mit $\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y)-y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}(y)-s\,y(0)-y'(0)$

$y(0)=1$, $y'(0)=0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y''+3y'-4y) = \mathcal{L}(y'')+3\mathcal{L}(y')-4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-x}) = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow s^2\mathcal{L}(y) - s + 3s\mathcal{L}(y) - 3 - 4\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow (s^2+3s-4)\mathcal{L}(y) - s - 3 = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{(s+3)(s+1)+1}{(s+1)(s^2+3s-4)}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s^2+4s+4}{(s+1)(s-1)(s+4)} = \frac{a}{s-1}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{s+4} = \frac{9}{10}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{s+1}-\frac{4}{15}\frac{1}{s+4}$

$\Rightarrow y = \frac{9}{10}e^{x}-\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{4}{15}e^{-4x}$

b) $\mathcal{L}(x''+x) = (s^2+1)\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(f) = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}} \Rightarrow$ Faltungssatz

(Da $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{\ldots}$) [illegible]

c) $\mathcal{L}(x'' - 2x' + 2x) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0))$, $x(0) = x'(0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(s^2 - 2s + 2) = e^{-t_0 s}$ $t_0 > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = e^{-t_0 s} \dfrac{1}{(s-1)^2 + 1}$ wegen $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-1)^2+1}\right) = e^t \sin t$

und dem Verschiebungssatz folgt

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le t_0 \\ e^{t - t_0} \sin(t - t_0) & \text{für } t \ge t_0 \end{cases}$$