7. Aufgabenblatt zu Math. I Chemie WS 18/19

1) Mit Hilfe der Grenzwertsätze und der Nullfolgen $\{\frac{1}{n}\}$, $\{q^n\}$ (mit $|q|<1$) werden die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte bestimmt.

a) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2-3n^2}\cdot\frac{n^{-2}}{n^{-2}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{2/n^2-3}$. Da $\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2}\to 0$ und da der Nenner des Bruches a_n nicht gegen Null geht, folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2}{\lim_{n\to\infty}(2/n^2-3)} = \frac{(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})^2}{2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-3} = -\frac{1}{3}$$

b) $a_n = n-\sqrt{n^2-n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{-n}{n+\sqrt{n^2-n}}\cdot\frac{n^{-1}}{n^{-1}}$

$\Rightarrow a_n = \frac{-1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1}{1+\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n n^2+\sqrt{n}}{(2n+1)^2}\cdot\frac{n^{-2}}{n^{-2}} = \frac{(-1)^n+\sqrt{1/n^3}}{(2+\frac{1}{n})^2}$.

Man sieht, dass a_n nicht konvergent ist, da $(-1)^n$ keinen Grenzwert besitzt, aber $\frac{1}{n^3}\to 0$ und $2+\frac{1}{n}\to 2$ gilt.

Aber mit $n=2m \Rightarrow a_{2m} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{8}m^{-3}}}{(2+\frac{1}{2}\frac{1}{m})^2}\to\frac{1}{4}$ und

$a_{2m+1} = \frac{-1+(2m+1)^{-\frac{3}{2}}}{(2+\frac{1}{2m+1})^2}\to -\frac{1}{4} \Rightarrow$

a_n besitzt die Häufungspunkte $\pm\frac{1}{4}$.

d) $a_n = \frac{2^{2n+2}+3}{3-2^{2n-1}}\cdot\frac{2^{-2n}}{2^{-2n}} = \frac{4+3\cdot(\frac{1}{4})^n}{3\cdot(\frac{1}{4})^n-\frac{1}{2}}$. Da $0<\frac{1}{4}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4})^n=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{-\frac{1}{2}} = -8$

2) a) $a_1=1$, $a_2=a_{1+1}=\sqrt{4}=2$, $a_3=a_{2+1}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$, $a_4=\sqrt{4\cdot a_3}\Rightarrow$ $a_4=2\sqrt{2\sqrt{2}}$. Man erkennt $a_1<a_2<a_3<a_4$

b) Beh: Es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ $a_n<4$. Nachweis induktiv (zunächst ist klar, dass wegen $a_1=1$ und $a_{n+1}=\sqrt{4a_n}$ $a_n>0$ gilt.)

Es ist $a_1=1<4$. Gilt nun für ein bel. $n\geq 1$ $a_n<4$ dann ist $a_{n+1}=\sqrt{4\cdot a_n}<\sqrt{4\cdot 4}=4$.

c) Wegen $a_n>0$ gilt: a_n monoton wachsend $\Leftrightarrow$ a_n^2 monoton wachsend.

Nun ist $a_{n+1}^2-a_n^2=(\sqrt{4a_n})^2-a_n^2=4a_n-a_n^2=\underbrace{a_n}_{>0}\underbrace{(4-a_n)}_{>0}>0$

$\Rightarrow$ a_n monoton wachsend und beschränkt.

$\Rightarrow a=\lim_{n\to\infty} a_n$ ex. und wegen $1\leq a_n\leq 4 \Rightarrow 1\leq a\leq 4$

d) $a=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{a_n}=2\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}=2\sqrt{a}$. Wegen $a\neq 0 \Rightarrow \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$.

3) $a_n = \frac{n}{3^n}$. Es ist $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})$

und wegen $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \le 2 \Rightarrow 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{2}{3}$

Damit gilt $a_{n+1} \le \frac{2}{3} a_n$ und damit:

$a_n - a_{n+1} \ge a_n - \frac{2}{3} a_n \ge \frac{1}{3} a_n > 0 \Rightarrow a_n$ monoton fallend

und $a_n = \frac{n}{3^n} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ex. und $a \ge 0$.

wäre $a > 0$, dann wäre

$$1 = \frac{a}{a} = \frac{\lim\limits_{n\to} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} \le \frac{2}{3} \text{ Widerspr.} \Rightarrow a = 0$$

4) a) $s := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$. Partialsumme $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2+2n}$

$$\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} := \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+2)} = \frac{a(n+2)+bn}{n(n+2)} \Leftrightarrow$$

$1 = a(n+1) + bn = (a+b)n + a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\Leftrightarrow a = 1 \wedge a+b = 0$

also $b = -1 \Rightarrow \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \Rightarrow$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ l=n}}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n=1 \\ l=n+2}}^{m} \frac{1}{n+2} = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} - \sum_{l=3}^{m+2} \frac{1}{l}$$

$n=1 \Rightarrow l=3$
$n=m \quad l=m+2$

$$\Rightarrow s_m = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \Rightarrow s = \lim_{m\to\infty} s_m = \frac{3}{2}$$

b) Geometrische Reihe: Für $|q| < 1$ gilt.

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} \quad (\text{Mit Konvention } 0^0 = 1)$$

Es ist $3^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ und damit

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-\frac{n}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j$$

$\left(\begin{array}{l} j = n-2 \\ n=2 \Rightarrow j=0 \end{array}\right)$

Da $0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt $\Rightarrow \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

und damit

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{3-\sqrt{3}}$$