Aufgaben Mathematik IIIa,b ET WS14/15,SS15

1. Berechnen Sie die Fourierreihe zu folgenden 2π - periodischen Funktionen

   a) $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$, $-\pi \leq x < \pi$

   b) $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$, $-\pi \leq x < \pi$.

2. Transformieren Sie mit Hilfe der Fouriertransformation in der Variablen x das Anfangswertproblem
   $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(0,x) = e^{-|x|}$, $u_t(0,x) = 0$
   in eine gewöhliche Differentialgleichung und lösen Sie diese.

3. Bestimmen Sie zur linearen Transformation $w = \frac{z-1}{z+i}$ das Bild

   a) der Kreislinie $|z| = 1$,

   b) der reellen und der imaginären Achse.

4. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $u(x,y)$ auf R^2 harmonisch sind und berechnen Sie gegebenenfalls alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen $v(x,y)$.

   a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x$,

   b) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$,

5. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten sowie den Typ und das zugehörige Residuum.

   a) $f(z) = \frac{z}{2-z} e^{\frac{2}{z+1}}$,

   b) $f(z) = \frac{z}{z^4 + 2z^2 + 1}$.

6. Berechnen Sie die Integrale

$$a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\, dx \qquad b) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\cos x + 2}\, dx$$

   mit Hilfe des Residuensatzes.

7. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Anfangwerprobleme

   a) $y'' + 2y' + 10y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

   b) $x'' + 9x = \delta(t-a)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $a > 0$

8. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen partiellen Dgl

$$y \cosh x u_x + \sinh x u_y = 0 \ .$$

9. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y u_x + x u_y = y u \quad , \quad u(0,y) = e^{y^2} \ .$$

10. Bestimmen Sie den jeweiligen Typ (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) der folgenden linearen partiellen Differezialgleichungen zweiter Ordnung

    a) $y^2 u_{xx} + 4xy u_{xy} + 5x^2 u_{yy} = o$,

    b) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = o$,

    und bestimme zur Dgl in b) die allgemeine Lösung.

11. Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,y) = f(x)g(y)$ das Randwertproblem

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad u(0,y) = u(\pi, y) = u(x,0) = 0 \ , \ u(x,1) = 3\sin(4x)$$

für das Rechteck $R = \{(x,y)|0 \le x \le \pi \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

12. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe geeigneter Integralsätze.

    a) $\int_C \vec{V}(x,y)\vec{n}_0 ds \quad , \ \vec{V}(x,y) = (y^2 - 2x^2, e^x + 3xy)$, $\vec{n}_0$ der nach Außen gerichtete Normaleneinheitsvektor ,

    b) $\int_C \vec{V}(x,y)\vec{T}_0 ds \quad , \ \vec{V}(x,y) = (3xy, \cosh y + 2x^2)$, $\vec{T}_0$: Tangenteneinheitsvektor ,

    wobei C die positiv orientierte Randkurve des Bereichs $B = \{(x,y)|0 \le y \le x^2 \ , \ 0 \le x \ \le 2 \}$ ist.

13. Der Hohlzylinder $4 \le x^2 + y^2 + 4x - 2y \le 11$ und die Ebenen $z = 0$, $x + y - z = -10$ begrenzen einen endlichen Körper **K**.

    a) Berechnen Sie das Volumen von **K**.

    b) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{V} = (x - \sin z, z - x + y, xz)$ durch die Oberfläche von **K** mit Hilfe eines Integralsatzes.

14. Die Fläche **F** ist durch

    $\vec{x} = (u \cos v, 2v, -u \sin v)$, $1 \le u \le 3$, $-\pi \le v \le 2\pi$

    gegeben.Berechnen Sie mit Hilfe eines Integralsatzes das Integral $\int_{\partial F} \vec{V} d\vec{x}$ für

    a) $\vec{V} = (yz - 2x, xz + y^2, xy)$,

    b) $\vec{V} = (z + y + 2\sinh x, x + y, 2x + z)$.

15. Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder quellen- bzw. wirbelfrei sind.

    a) $\vec{V} = \left(y - zy^2 \sin(xz), 2y\cos(xz) + x, -y^2 x \sin(xz)\right)$,

    b) $\vec{V} = \left(\cos(x-y) - e^{x+z}, \cos(y-x) + 2xyz, e^{x+z} - xz^2\right)$.