Mathematik II für Maschinenbau- und Wirtschaftsingenieure

Dr. D. Wrase[1)]

Vorlesungsskriptum
im SS 1998

Universität – GH – Siegen

[1)]Fehlermeldungen bitte an `schueler@gmx.de`. Eine aktuelle Version dieses Skripts befindet sich unter `http://www.informatik.uni-siegen.de/~schueler/mathe.htm`. Die vorliegende Version wurde am 24. September 2001 erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 9

Ebene Kurven

9.1 Kurven in Parameterdarstellung

Bewegt sich ein Massenpunkt in einer Ebene (der (x, y)-Ebene), so sind seine Koordinaten von der Zeit abhängig:

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t: \text{ Zeitparameter.}$$

Schon daher ist es sinnvoll, Kurven in sogenannter *Parameterform* darzustellen (vgl. Abb. 9.1).

Definition 9.1 *Sind $x(t),\ y(t)$ für $t \in [a, b]$ stetige reellwertige Funktionen, dann wird durch $x(t),\ y(t),\ t \in [a, b]$ eine* ebene Kurve C *definiert. t:* Parameter.

Beispiel 9.2 Ist

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi] \tag{9.1}$$

$\Rightarrow x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, also wird durch (9.1) der Kreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

in Parameterform dargestellt.

Ebenso erhält man durch

$$x(t) = \cosh t,\ y(t) = \sinh t,\ t \in \mathbb{R}$$

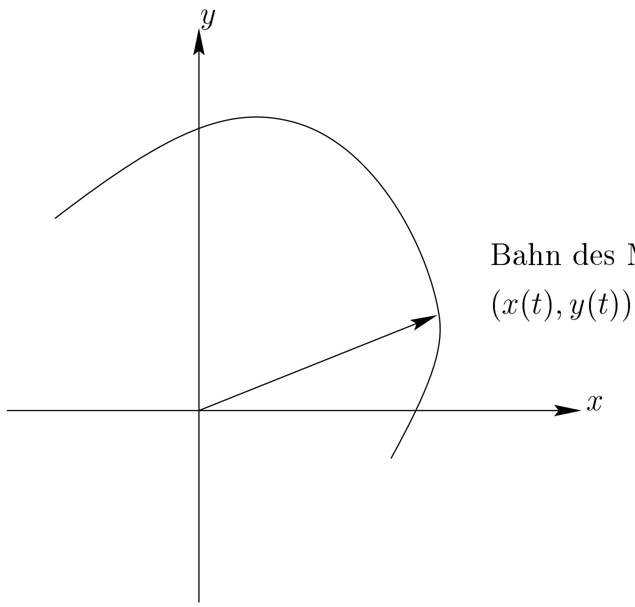

Abbildung 9.1: Parameterform

eine Parameterdarstellung der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

□

Eine Skizze einer in Parameterform gegebenen Kurve $x(t), y(t),\ t \in [a, b]$ fertigt man analog zum Schaubild $y = f(x)$ an. Man geht von einer Wertetabelle aus,

t	$t_0 = a$	t_1	$\dots$	$t_n = b$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_1)$	$\dots$	$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_1)$	$\dots$	$y(b)$

trägt die Punkte $(x(t_k), y(t_k))$ im Koordinatensystem ein und verbindet diese sinnvoll.

Beispiel 9.3 (vgl. Abb. 9.2).

$$x(t) = t^2, y(t) = t^3,\ 0 \le t \le 2.$$

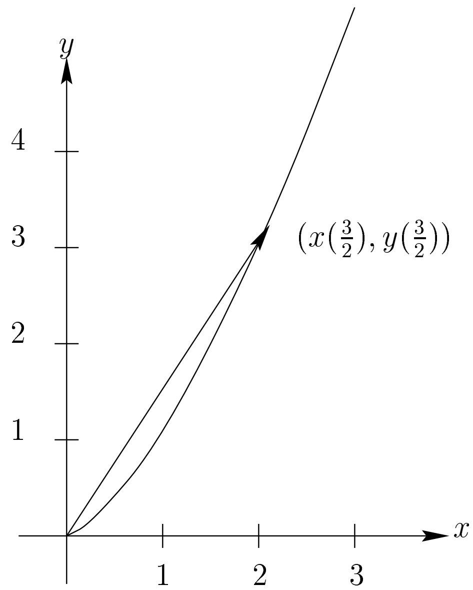

Abbildung 9.2: Beispiel für Parameterform

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$x(t)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
$y(t)$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

□

Für die Berechnung von Kurveneigenschaften ist es zweckmäßig, die Kurve vektoriell darzustellen:

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Der Kurvenpunkt $(x(t), y(t))$ liegt dann in der Spitze des vom Nullpunkt angetragenen Vektors $\vec{x}(t)$ (vgl. Abb. 9.3).

9.1.1 Tangente, Normale, Bogenlänge, Krümmung, Evolute

Wenn im folgenden Ableitungen benutzt werden, wird stillschweigend vorausgesetzt, daß diese existieren und (stückweise) stetig sind.

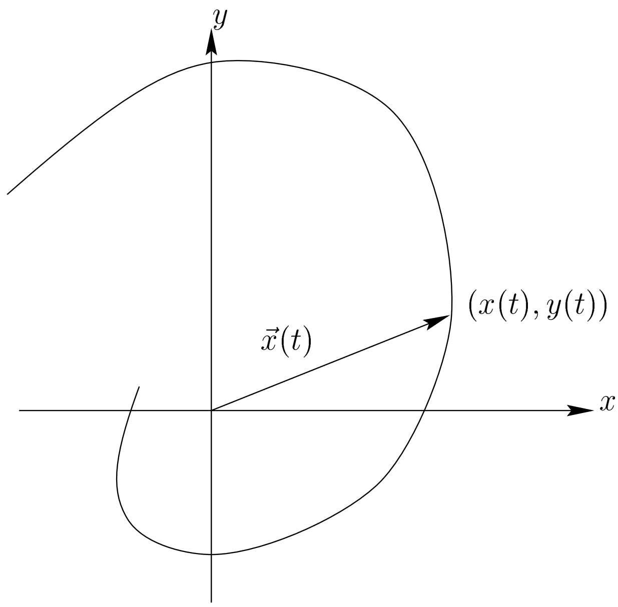

Abbildung 9.3: vektorielle Darstellung einer Kurve

Definition 9.4 *Die Ableitungen der Funktionen $x(t), y(t)$ nach dem Parameter t werden mit „Punkten“ bezeichnet:*

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t),\ \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t),\ \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t),\ \ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t), \ldots$$

Existiert

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)\right],$$

so liegt $\dot{\vec{x}}(t)$ tangential zur Kurve im Punkt $\vec{x}(t)$ (vgl. Abb. 9.4).
Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)\right] &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}(x(t+h) - x(t)), \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t)) \right) \\ &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \end{aligned}$$

erhält man

$$\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

d. h. man differenziert den Vektor $\vec{x}(t)$, indem man die Komponenten ableitet.

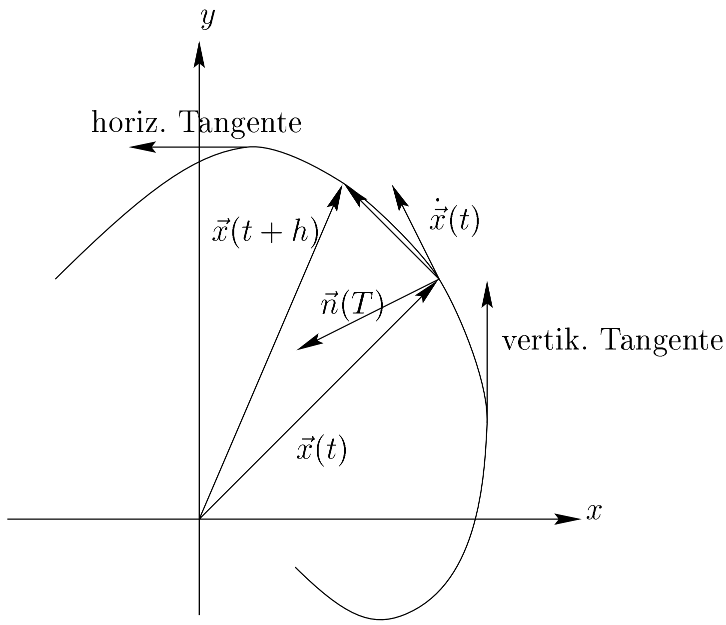

Abbildung 9.4: Tangentenvektor

Definition 9.5 $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{T}(t)$ *wird der* Tangentenvektor der Kurve im Punkt $\vec{x}(t)$ *genannt.*

Die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt $\vec{x}(t_0)$ ist

$$y' = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Die Tangente ist horizontal, wenn $\dot{y}(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) \neq 0$,
die Tangente ist vertikal, wenn $\dot{y}(t_0) \neq 0,\ \dot{x}(t_0) = 0$ gilt.

Definition 9.6 *Der Vektor* $\vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ *wird* Normalenvektor der Kurve im Punkt $\vec{x}(t)$ *genannt.*

Satz 9.7 *Es ist*

$$\vec{n}(t)\vec{T}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = 0,$$

der Normalenvektor $\vec{n}(t)$ *ist also senkrecht zum Tangentenvektor und damit senkrecht zur Kurve.*

Satz 9.8 *Die Länge des Kurvenbogens von $\vec{x}(t_1)$ bis $\vec{x}(t_2)$, $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, erhält man durch*

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{x}}|\, dt.$$

Bogenlängenelement:

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt.$$

Definition 9.9 *Kurvenpunkte $\vec{x}(t_0)$ mit $\dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{0}$, d. h. $\dot{x}(t_0) = 0 \wedge \dot{y}(t_0) = 0$, nennt man* singuläre Kurvenpunkte. *In singulären Kurvenpunkten existiert keine Tangente. (Die Kurve besitzt dort Ecken oder Spitzen, siehe weiter unten: Zykloide, Epizykloide...)*

Satz 9.10 *Besitzt die Kurve $\vec{x}(t)$ nur endlich viele singuläre Punkte, dann ist*

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau$$

streng monoton wachsend, besitzt also eine Umkehrfunktion $t = t(s)$. Damit kann man die Kurven nach der Bogenlänge s (dem natürlichen Parameter*) darstellen:*

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))).$$

Beispiel 9.11 $C\colon \vec{x}(t) = (r\cos t, r\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ (Kreis um $(0,0)$, Radius $r > 0$).

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = (-r\sin t, r\cos t),\ |\dot{\vec{x}}(t)| = r\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = r.$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^t r\, dt = rt \Rightarrow t = \frac{1}{r}s.$$

$$\Rightarrow \vec{x}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \quad \text{Parametrisierung nach der Bogenlänge,}$$

$$s(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r \quad \text{Kurvenlänge.}$$

□

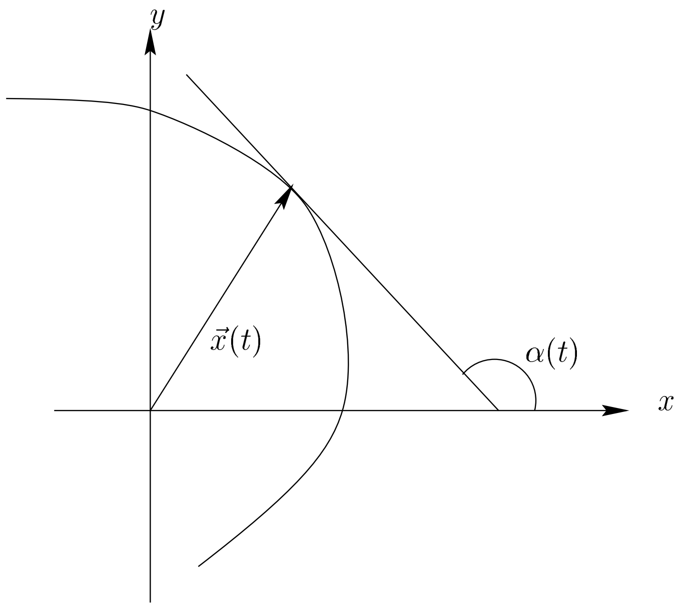

Abbildung 9.5: Krümmung

9.1.2 Krümmung

Definition 9.12 *Die* Krümmung der Kurve $\vec{x}(t),\ t \in [a,b]$ im Punkte $(x(t), y(t))$ *wird definiert als die Ableitung des Tangentenwinkels $\alpha(t)$ nach der Bogenlänge s (Abb. 9.5).*

Wegen

$$\begin{aligned}
\tan\alpha(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \\
\Rightarrow \alpha(t) &= \arctan\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \\
\Rightarrow \frac{d}{ds}\alpha(t) &= \frac{d}{dt}\alpha(t)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow : \mathcal{K}(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Definition 9.13 *Als* Scheitelpunkte *bezeichnet man Punkte, in denen die Krümmung extremal ist.*

Beispiel 9.14 Krümmung des Kreises $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $x(t) = x_0 + r\cos t$, $y(t) = y_0 + r\sin t \Rightarrow \dot{x} = -r\sin t$, $\dot{y} = r\cos t$, $\ddot{x} = -r\cos t$, $\ddot{y} = -r\sin t$.

$$\Rightarrow \mathcal{K}(t) = \frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Die Krümmung eines Kreises mit Radius $r > 0$ ist also konstant $\frac{1}{r}$. □

Definition 9.15 *Für eine beliebige Kurve $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ wird nun*

$$r(t) = \frac{1}{|\mathcal{K}(t)|}$$

der Krümmungsradius der Kurve im Punkt $(x(t), y(t))$ *genannt.*

Der Kreis, welcher die Kurve im Punkt $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ berührt und dort die gleiche Krümmung wie die Kurve besitzt, wird Krümmungskreis der Kurve im Punkt (x_0, y_0) *genannt (Abb. 9.6).*

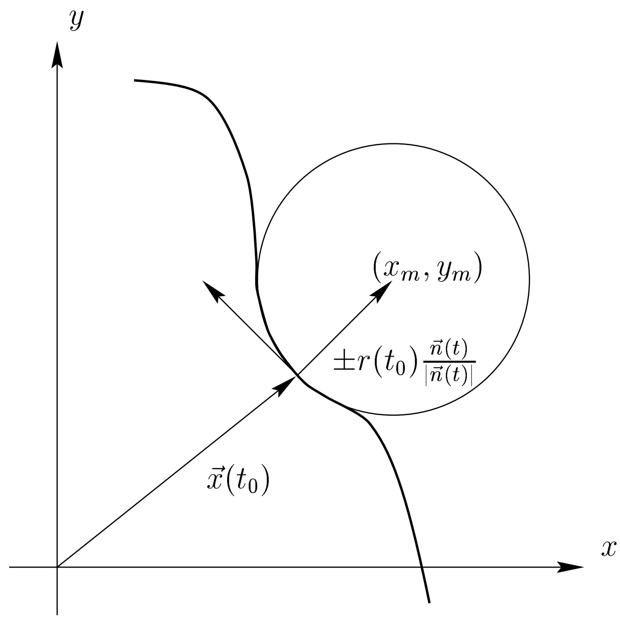

Abbildung 9.6: Krümmungskreis

Sein Radius ist natürlich $r(t) = \dfrac{1}{|\mathcal{K}(t)|}$, und den Mittelpunkt erhält man durch

$$(x_m(t), y_m(t)) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\mathcal{K}(t)} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|}.$$

Also: x-Koordinate des Mittelpunktes des Krümmungskreises:

$$x_m(t) = x(t) - \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \cdot \dot{y}(t),$$

y-Koordinate:

$$y_m(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \cdot \dot{x}(t).$$

Definition 9.16 *Die Gesamtheit der Mittelpunkte der Krümmungskreise einer ebenen Kurve C bilden eine weitere Kurve Γ. Diese wird die* Evolute *zu C genannt (Abb. 9.7).*

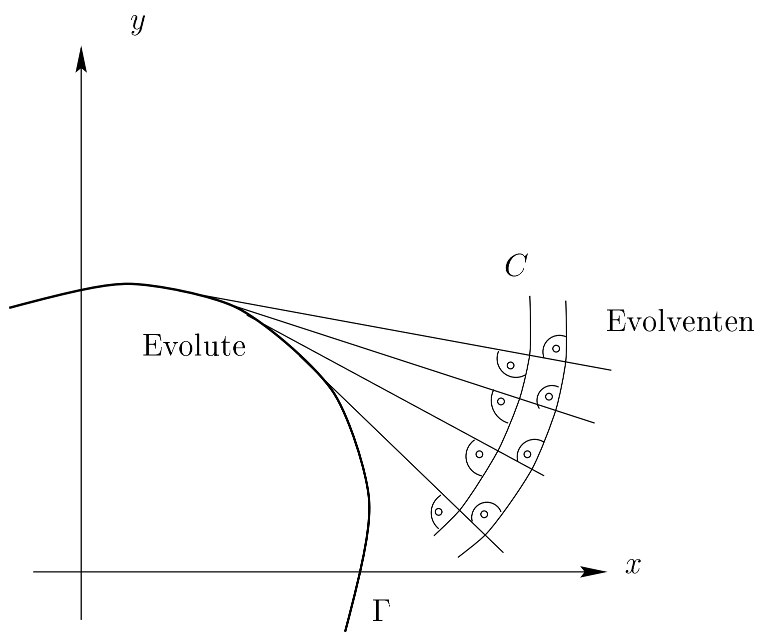

Abbildung 9.7: Evolute und Evolventen

Die Evolute Γ ist auch die Einhüllende der Normalen der Kurve C.

Satz 9.17 *Der Zuwachs der Bogenlänge der Evolute ist gleich dem Zuwachs des Krümmungsradius der Ursprungskurve. Man kann also, wenn Γ die Evolute zu C ist, lokal C als eine Abwicklung der Kurve Γ auffassen.*

Daher definiert man:

Definition 9.18 *Die Kurve C wird eine* Evolvente *der Kurve Γ genannt, wenn Γ Evolute zu C ist (Abb. 9.7).*

Bemerkung: *Eine genügend glatte Kurve besitzt genau eine Evolute, aber ∞ viele Evolventen.*

9.1.3 Jordankurve, Flächenberechnung

Definition 9.19 *Die Kurve C: $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ besitzt einen* Doppelpunkt (x_0, y_0), *wenn mindestens zwei verschiedene $t_0, t_1 \in (a, b)$ existieren mit*

$$x(t_0) = x(t_1) \text{ und } y(t_0) = y(t_1).$$

(Abb. 9.8)

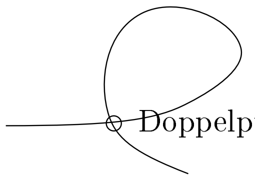

Abbildung 9.8: Doppelpunkt

Definition 9.20 *Die Kurve C: $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ wird* Jordankurve *genannt, wenn $x(t), y(t)$ stetig sind, die Kurve geschlossen ist ($\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$) und keine Doppelpunkte besitzt.*

Sie heißt positiv orientiert, *wenn beim Durchlaufen der Kurve das Kurveninnere links liegt.*

Die Kurve C heißt Jordanbogen, *wenn sie alle sonstigen Bedingungen einer Jordankurve erfüllt, aber nicht geschlossen ist.*

Flächeninhalt des von dem Jordanbogen $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$ und den von $(0, 0)$ nach $(x(t_1), y(t_1))$ bzw. $(x(t_2), y(t_2))$ führenden Strecken begrenzten Sektors (vgl. Abb. 9.9):

$$F = \frac{1}{2} \left| \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\, dt \right|.$$

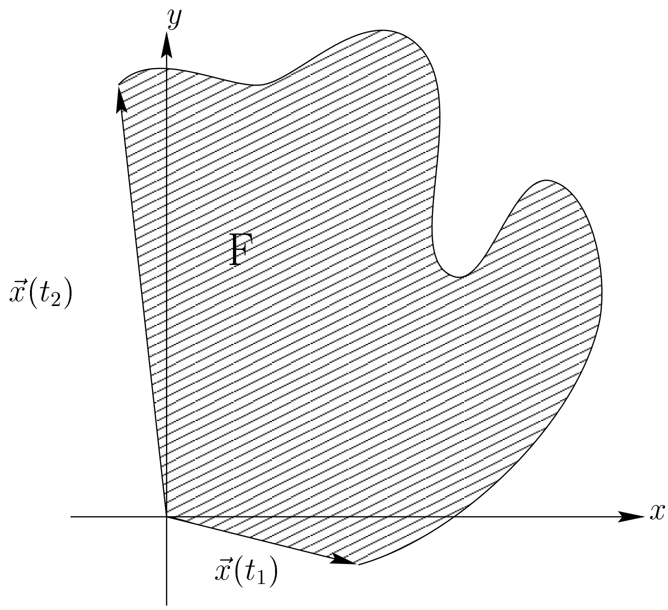

Abbildung 9.9: Flächeninhalt

Ist durch $\vec{x}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a, b]$ eine positiv orientierte Jordankurve gegeben, so berechnet sich der Inhalt der durch die Kurve begrenzten Fläche als

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]\, dt.$$

Das Integral

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)|\, dt,\ t_1 < t_2$$

gibt die gesamte Fläche an, welche vom Fahrstrahl überstrichen wird (mehrfach überstrichene Flächenteile werden entsprechend oft gezählt!).

9.1.4 Anwendungsbeispiele: Rollkurven, Bewegung eines Massenpunktes

9.1.4.1 Zykloide

Ein Kreis mit Radius $a > 0$ rolle (ohne zu gleiten) auf einer Geraden ab. Welche Kurve beschreibt dabei ein fest mit dem Kreis verbundener Punkt P mit Abstand $a + b$ $(-a \leq b)$ zum Mittelpunkt des Kreises (vgl. Abb. 9.10)?

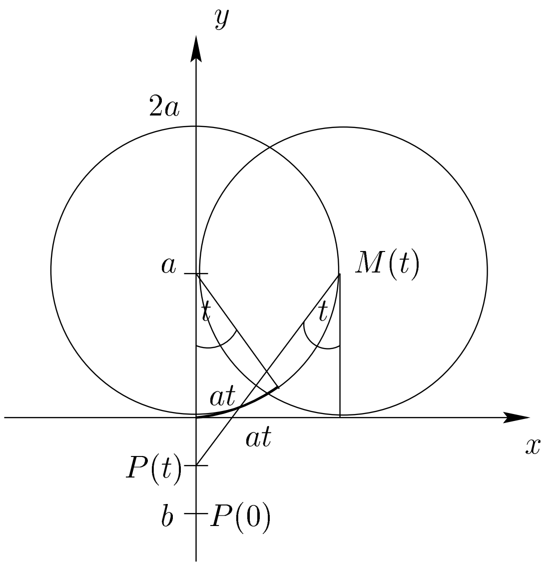

Abbildung 9.10: Problemstellung Rollkurve

Als Parameter wird hier der Rollwinkel t im Bogenmaß gewählt.
Für die Koordinaten des Punktes $P(t)$ erhält man

$$(x(t), y(t)) = (at, a) - (a + b)(\sin t, \cos t).$$

Definition 9.21 *Ist $b = 0$, so nennt man die Kurve*

$$x(t) = a(t - \sin t),\; y(t) = a(1 - \cos t)$$

Zykloide.
Ist $b > 0$ (bzw. $b < 0$), so nennt man die Kurve

$$x(t) = at - (a + b)\sin t,\; y(t) = a - (a + b)\cos t$$

verlängerte (bzw. verkürzte) Zykloide *(Abb. 9.11)*

Es wird nun die Zykloide

$$\vec{x}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

näher untersucht:

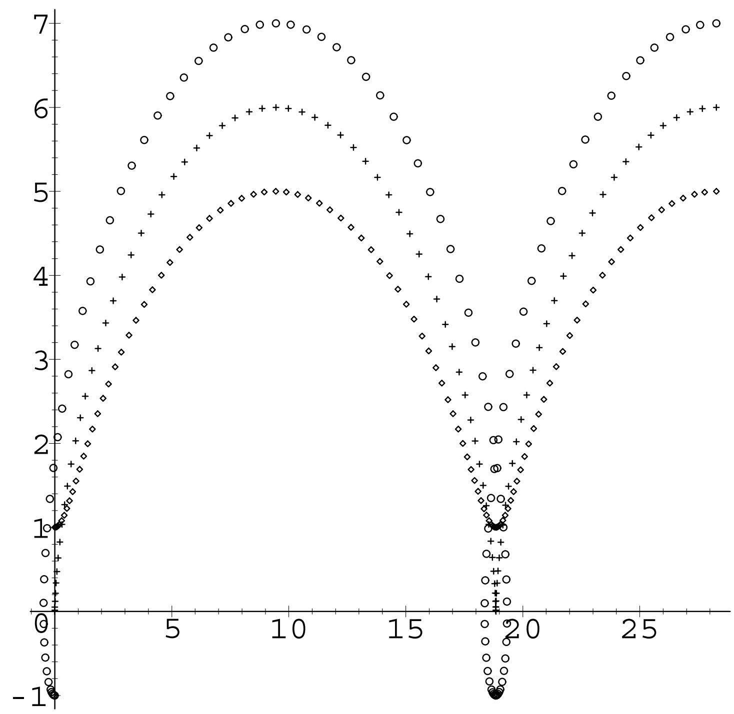

Abbildung 9.11: Zykloide: $\circ$ verlängerte, $\diamond$ verkürzte, $+$ normale

- Tangentenvektor: $\dot{\vec{x}}(t) = a(1-\cos t, \sin t)$.

  Man sieht, daß für $t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$, also besitzt die Zykloide dort singuläre Punkte (Spitzen).

- Normalenvektor: $\vec{n}(t) = a(-\sin t, 1-\cos t),\ t \neq 2k\pi$,

- Tangentensteigung: $y' = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}, \quad t \neq 2k\pi$,

- horizontale Tangente: $\dot{y}(t) = a\sin t = 0,\ \dot{x}(t) = a(1-\cos t) \neq 0 \Rightarrow t = (2k+1)\pi$, d. h. $x = (2k+1)\pi a,\ y = 2a$,

- Grenzlage der Tangenten in den singulären Kurvenpunkten:

$$\lim_{t\to 2k\pi} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 2k\pi} \frac{\sin t}{1-\cos t} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t\to 2k\pi} \frac{\cos t}{\sin t}$$

  existieren nicht, aber

$$\lim_{t\to 2k\pi_+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to 2k\pi_-} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\infty,$$

woraus man erkennt, daß hier tatsächlich Spitzen vorliegen.

- Länge eines Zykloidenbogens:

$$\begin{aligned} s(0,2\pi) &= \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{x}}(t)|\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\;dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\;dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\;dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt, \quad \text{da } \sin\frac{t}{2}\geq 0 \text{ für } 0\leq t\leq 2\pi, \\ &= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 8a. \end{aligned}$$

- Krümmung der Zykloide:

$$x(t)=a(t-\sin t),\ y(t)=a(1-\cos t),\ \dot{x}(t)=a(1-\cos t),$$

$$\dot{y}(t)=a\sin t,\ \ddot{x}(t)=a\sin t,\ \ddot{y}(t)=a\cos t.$$

Bei der Berechnung der Bogenlänge wurde schon

$$|\dot{\vec{x}}|^2=\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2=4a\sin^2\frac{t}{2}$$

berechnet. Nun ist

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) &= a^2[\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t] \\ &= a^2(\cos t-1) \\ &= -2a^2\sin^2\frac{t}{2}, \end{aligned}$$

also ist die Krümmung

$$\mathcal{K}(t)=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2a^2\sin^2\frac{t}{2}}{(4a^2\sin^2\frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}.$$

In den singulären Kurvenpunkten $(\vec{x}(2k\pi))$ wird also nicht nur die Tangentensteigung, sondern auch die Krümmung ∞.

- Scheitelpunkte der Zykloide:

  Da $|\sin\frac{t}{2}|$ für $0 \leq t \leq \pi$ von 0 nach 1 streng monoton wächst, für $\pi \leq t \leq 2\pi$ von 1 nach 0 streng monoton fällt und 2π-periodisch ist, besitzt die Zykloide genau die Scheitelpunkte

$$(x((2k+1)\pi), y((2k+1)\pi)) = ((2k+1)a\pi, 2a).$$

- Evolute der Zykloide:

  Wegen $\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2 = 4a\sin^2\frac{t}{2} = 2a^3(1-\cos t)$, $\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t) = a^2(\cos t-1)$ (siehe oben), ist

$$\frac{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}{\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)} = -2,$$

  also erhält man für die Koordinaten der Krümmungskreismittelpunkte:

$$x_m(t) = x(t) - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}} = a(t-\sin t) + 2a\sin t = a(t+\sin t),$$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y(t) + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}} = a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t) \\ &= -a(1-\cos t) = -2a + a(1+\cos t). \end{aligned}$$

  Setzt man $t = \pi + \tau$ ein, so folgt

$$x_m(\pi+\tau) = a\pi + a(\tau - \sin\tau), \quad y_m(\pi+\tau) = -2a + a(1-\cos\tau),$$

  woraus man erkennt, daß die Evolute der Zykloide entsteht, indem man die Zykloide um $-2a$ in y-Richtung und um $a\pi$ in x-Richtung parallel verschiebt.

  Die Ausgangszykloide ist damit eine Evolvente der parallel verschobenen Zykloide.

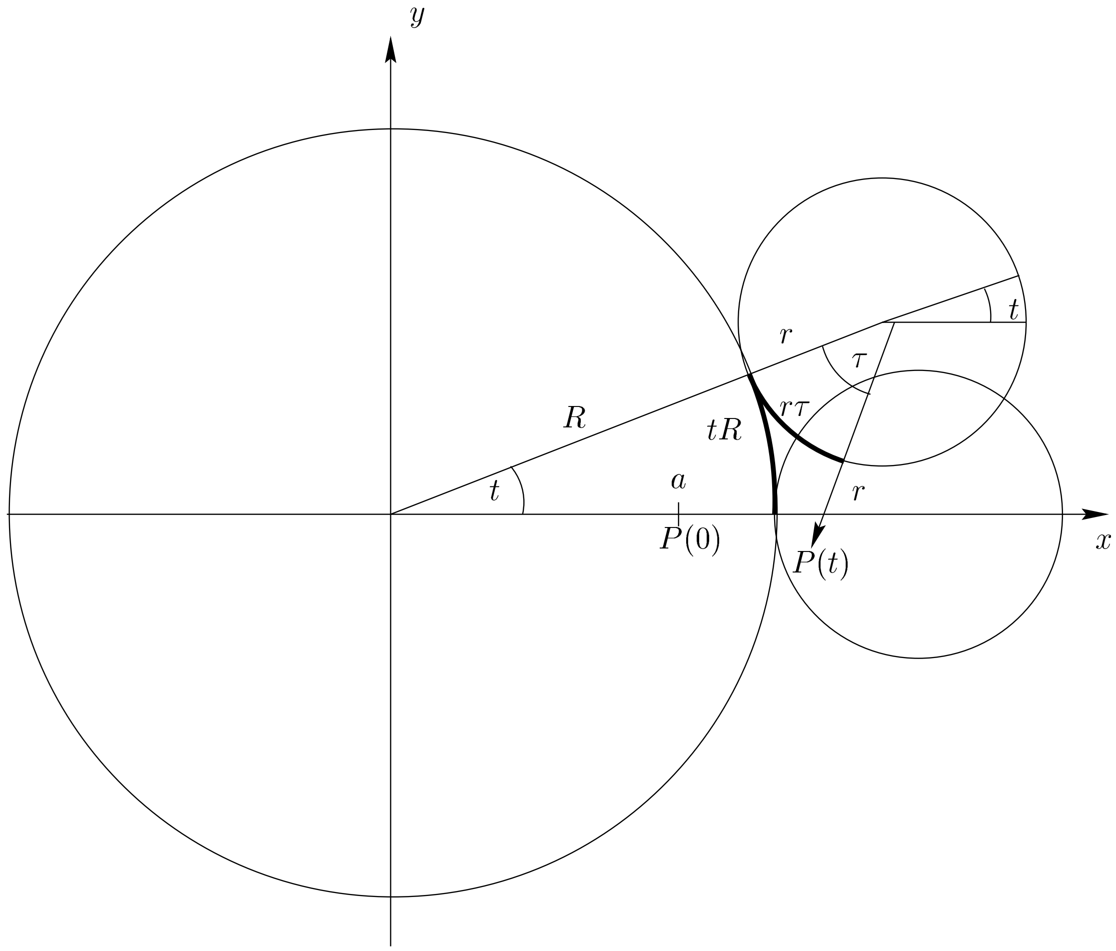

Abbildung 9.12: Epizykloide

9.1.4.2 Epizykloiden

Definition 9.22 *Rollt man einen Kreis mit Radius $r > 0$ (ohne Gleiten) auf einem festen Kreis mit Radius $R > 0$ ab, so nennt man die Bahnkurve eines fest mit dem rollenden Kreis verbundenen Punktes eine* Epizykloide *(Abb. 9.12).*

Ist t der Winkel, der auf dem festen Kreis abgerollt wird und τ der Winkel, um den sich der rollende Kreis dreht, so ist

$$R \cdot t = r\tau \Rightarrow \tau = \frac{R}{T} t = mt.$$

$m = \dfrac{R}{T}$ wird *Modul* genannt.
Damit erhält man als Koordinaten des Punktes $P(t)$:

$$(x(t), y(t)) = (R + r)(\cos t, \sin t) - (r + a)(\cos(\tau + t), \sin(\tau + t)),$$

und mit $R = mr$, $\tau = mt$ erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= r(m + 1)\cos t - (r + a)\cos(m + 1)t, \\ y(t) &= r(m + 1)\sin t - (r + a)\sin(m + 1)t. \end{aligned}$$

Definition 9.23 *Man nennt die Kurve* verlängerte *oder* verkürzte Epizykloide*, je nachdem, ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist, $-r \leq a$.*

Für $a = 0$ erhält man die Epizykloide

$$x(t) = r[(m + 1)\cos t - \cos(m + 1)t], \; y(t) = r[(m + 1)\sin t - \sin(m + 1)t].$$

Die Epizykloide hängt natürlich wesentlich vom Modul $m = \frac{R}{r}$, dem Radienverhältnis, ab:

- Ist m ganzzahlig, so geht die Epizykloide schon nach einem Umlauf in sich über, Periode 2π,
- Ist m rational, $m = \frac{p}{q}$, p, q teilerfremd, dann geht die Epizykloide genau nach q Umläufen in sich selbst über, Periode $2q\pi$ (Abb. 9.13, 9.14),
- Ist m irrational, so geht die Epizykloide nie in sich selbst über, keine Periodizität (Abb. 9.15).

Das gleiche gilt natürlich auf für die verlängerte bzw. verkürzte Zykloide.

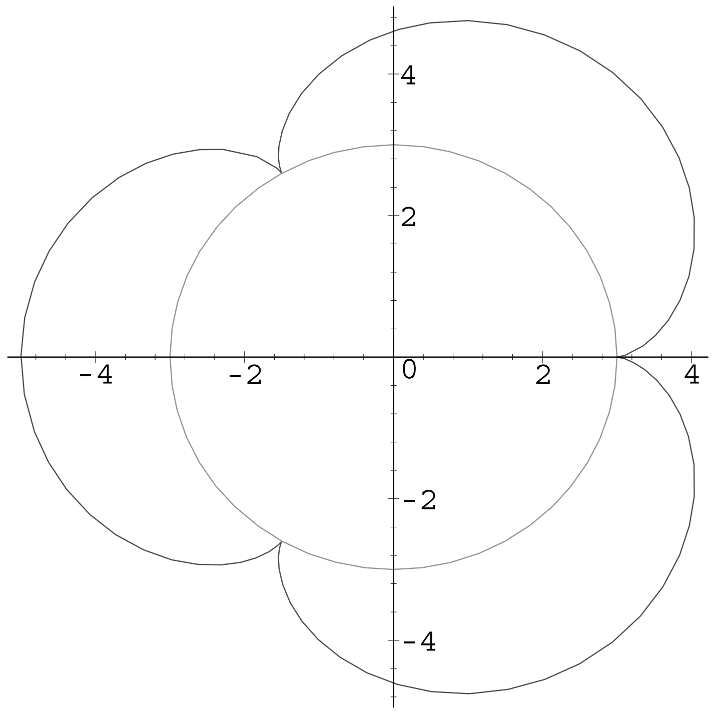

Abbildung 9.13: Epizykloide mit Radienverhältnis 1/3

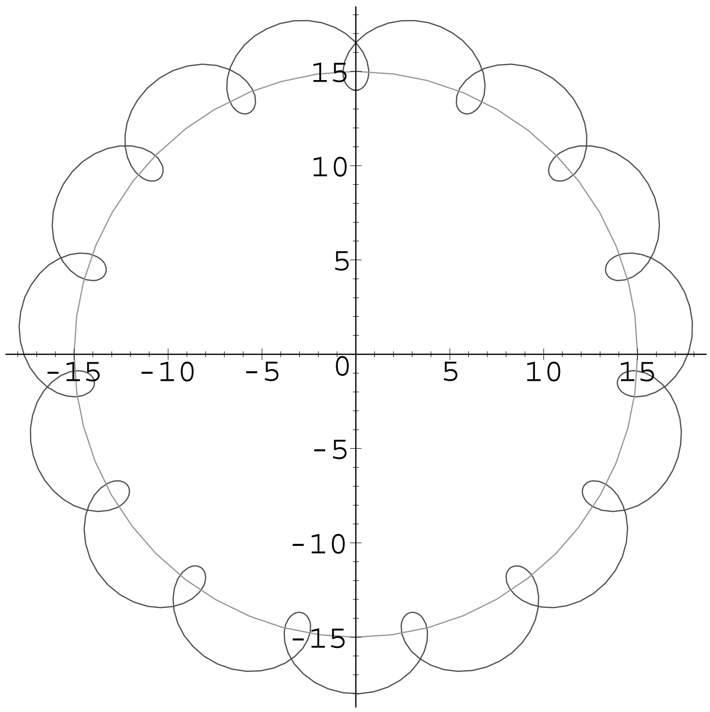

Abbildung 9.14: Epizykloide mit Radienverhältnis 1/15

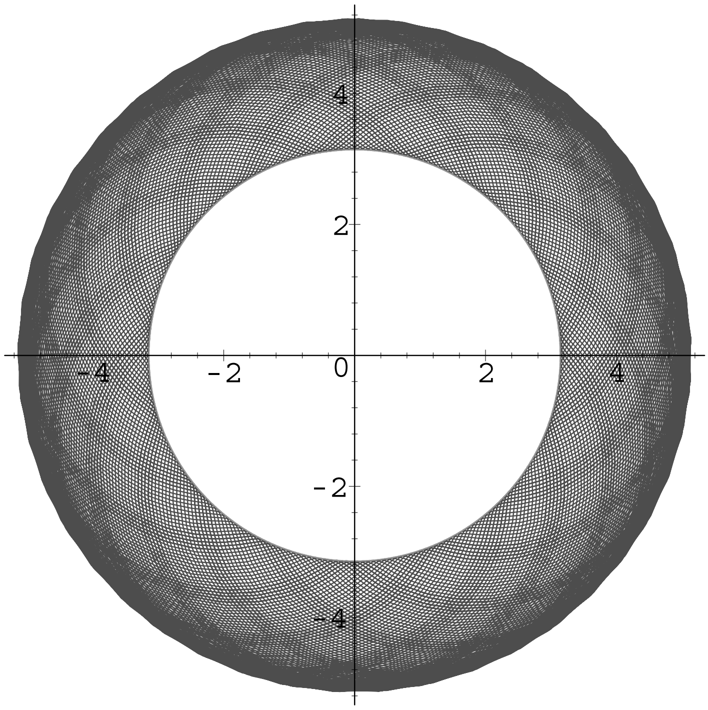

Abbildung 9.15: Epizykloide mit irrationalem Radienverhältnis

9.1.4.3 Hypozykloiden

Definition 9.24 Hypozykloiden *entstehen analog zu den Epizykloiden, wenn der Kreis mit Radius $r < R$ innen auf dem Kreis mit Radius R abrollt (Abb. 9.16).*

Ist wieder t der auf dem festen Kreis abgerollte Winkel, τ der Rollwinkel des rollenden Kreises und $m = \frac{R}{r}$, so ist wieder $\tau = mt$ und damit erhält man für die Koordinaten des Punktes $P(t)$:

$$(x(t), y(t)) = (R - r)(\cos t, \sin t) + (r + a)(\cos(\tau - t), -\sin(\tau - t)).$$

Mit $R = mr,\ \tau = mt$ folgt

$$x(t) = r(m-1)\cos t + (r+a)\cos(m-1)t,$$

$$y(t) = r(m-1)\sin t - (r+a)\sin(m-1)t.$$

Definition 9.25 *Man nennt die Kurve wieder* verlängerte *bzw.* verkürzte Hypozykloide, *wenn $a > 0$ bzw. $a < 0$, $a \geq -r$ ist.*

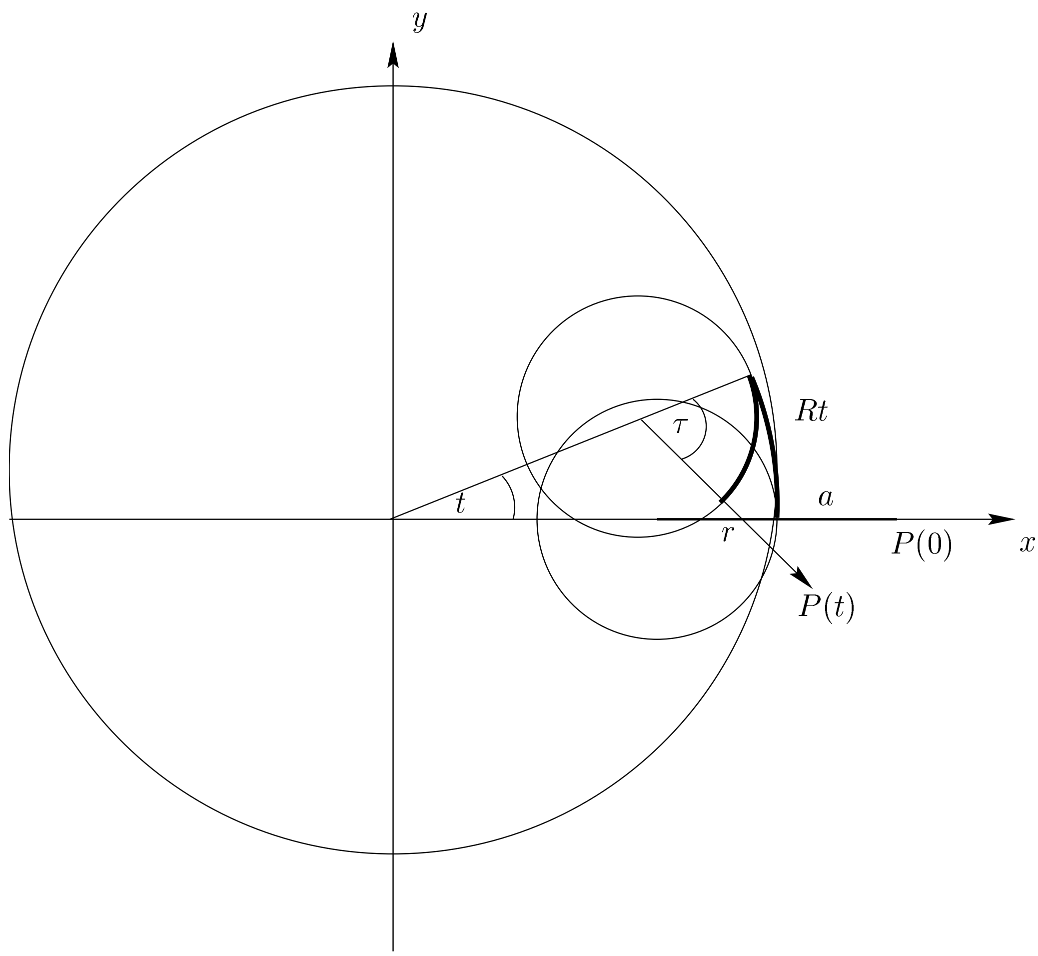

Abbildung 9.16: Hypozykloide

Für $a = 0$ erhält man die Hypozykloide

$$x(t) = r[(m-1)\cos t + \cos(m-1)t],\ y(t) = r[(m-1)\sin t - \sin(m-1)t].$$

Auch hier hat man 2π-Periodizität, wenn m ganzzahlig ist und die Periode $2\pi q$, wenn $m = \frac{p}{q}$ ist (p, q teilerfremd).

Es wird nun der Fall $m = 2$ betrachtet.

$$x(t) = r\cos t + (r+a)\cos t = (2r+a)\cos t,$$

$$y(t) = r\sin t - (r+a)\sin t = -a\sin t.$$

Im Fall $a = 0$ ist $x(t) = 2r\cos t, y(t) \equiv 0$, damit schwingt der Punkt P periodisch auf der x-Achse zwischen $-R$ und R. Aus der periodischen Rollbewegung der Kreise wird eine periodisch geradlinige Bewegung des Punktes P.

Ist $a \neq 0$, also $x(t) = (2r+a)\cos t,\ y(t) = -a\sin t$ ($2r + a \neq 0$ wegen $a \geq -r$), dann gilt

$$\left(\frac{x(t)}{2r+a}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Damit ist die Bahn des Punktes P eine Ellipse mit den Halbachsen $2r + a, |a|$.

Bogenlänge und Flache innerhalb einer Hypozykloide, $m \in \mathbb{N},\ m > 2$

$$x(t) = r[(m-1)\cos t + \cos(m-1)t], \quad y(t) = r[(m-1)\sin t - \sin(m-1)t],$$

$$\dot{x}(t) = r(m-1)[-\sin t - \sin(m-1)t], \quad \dot{y}(t) = r(m-1)[\cos t - \cos(m-1)t].$$

Da die Hypozykloide (für $m \in \mathbb{N}$) aus m deckungsgleichen Bögen besteht, ist ihre gesamte Länge

$$\begin{aligned} s(0, 2\pi) = m & \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt \\ = \quad & rm(m-1) \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sqrt{(\sin t + \sin(m-1)t)^2 + (\cos t - \cos(m-1)t)^2}\, dt \\ = \quad & rm(m-1) \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sqrt{2 + 2(\sin t \sin(m-1)t - \cos t \cos(m-1)t)}\, dt \end{aligned}$$

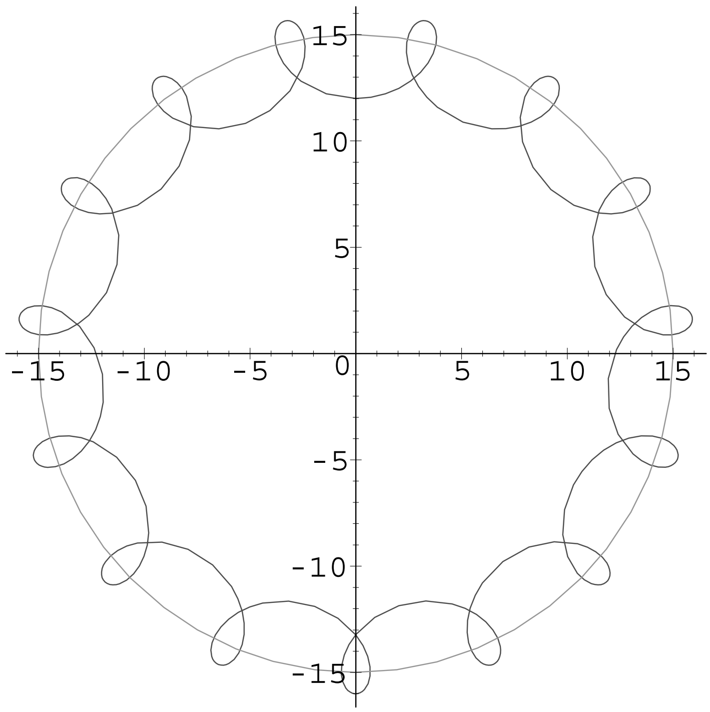

Abbildung 9.17: Hypozykloide, Radienverhältnis 1/15

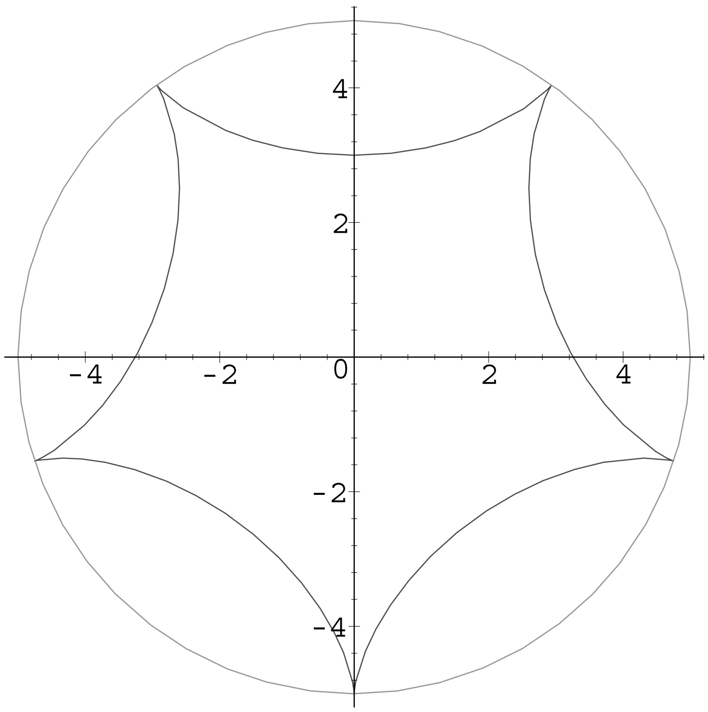

Abbildung 9.18: Hypozykloide, Radienverhältnis 1/5

$$\begin{aligned}
&= rm(m-1)\int_0^{\frac{2\pi}{m}} [2-2\cos mt]^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 2rm(m-1)\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sqrt{\sin^2\frac{m}{2}t}\,dt, \qquad \left(\text{und da } \sin\frac{m}{2}t \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{m}\right): \\
&= 2rm(m-1)\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sin\frac{m}{2}t\,dt \\
&= -4r(m-1)\cos\frac{m}{2}t\Big|_0^{\frac{2\pi}{m}} \\
&= 8r(m-1).
\end{aligned}$$

Flächenformel:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]\,dt \quad \text{(Kurve positiv orientiert)} \\
&= \frac{1}{2}r^2(m-1)\int_0^{2\pi}\{[(m-1)\cos t+\cos(m-1)t][\cos t-\cos(m-1)t] \\
&= \qquad\qquad +[\sin t+\sin(m-1)t][(m-1)\sin t-\sin(m-1)t]\}\,dt \\
&= \frac{1}{2}r^2(m-1)\int_0^{2\pi}\{(m-2)[1+\cos t+\cos(m-1)t \\
&= \qquad\qquad +\sin t\sin(m-1)t]\}\,dt \\
&= \frac{1}{2}r^2(m-1)(m-2)\int_0^{2\pi}[1-\cos mt]\,dt \\
&= \frac{1}{2}r^2(m-1)(m-2)\left[t-\frac{1}{m}\sin mt\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi r^2(m-1)(m-2).
\end{aligned}$$

9.1.4.4 Ebene Bahnkurve eines Massenpunktes

Es sei nun

$$C\colon \vec{x}(t) = (x(t), y(t)), \quad t_0 \leq t$$

die Bahnkurve eines Massenpunktes der Masse $m > 0$ und der Parameter t sei die Zeit.

Dann ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

die (vektorielle) Momentangeschwindigkeit,

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

die absolute Momentangeschwindigkeit,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\vec{x}}(\tau)|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

der zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg.
Parametrisiert man die Kurve nach der Bogenlänge $s(t)$,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(s(t)) = (x(s(t)), y(s(t))),$$

dann ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \left(\frac{d}{ds}\vec{x}(s(t))\right) \cdot s'(t),$$

und damit, wegen $s'(t) = |\dot{\vec{x}}(t)|$:

$$\vec{T}(s(t)) = \frac{d}{ds}\vec{x}(s)$$

der Tangenteneinheitsvektor, also

$$\vec{T}(s(t)) = (\cos\alpha(s(t)), \sin\alpha(s(t))),$$

wobei $\alpha(s(t))$ der Tangentenwinkel ist.
Wegen $\vec{T}(s(t)) \cdot \vec{T}(s(t)) = 1$ folgt, wenn man nach s differenziert:

$$\left(\frac{d}{ds}\vec{T}(s)\right) \cdot \vec{T}(s) = 0,$$

und da

$$\frac{d}{ds}\vec{T}(s) = \frac{d}{ds}(\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))\alpha'(s)$$

gilt und $\alpha'(s) = \mathcal{K}(s(t))$ die Krümmung der Kurve ist, erhält man

$$\frac{d}{ds}\vec{T}(s(t)) = \mathcal{K}(s(t))(-\sin(\alpha(s(t))), \cos(\alpha(s(t)))) = \mathcal{K}(s(t))\vec{n}_0(s(t)),$$

wobei $\vec{n}_0(s(t))$ der Normaleneinheitsvektor der Kurve ist.
Für die Beschleunigung des Massenpunktes gilt: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$.
Damit ist

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(s(t)) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d}{ds}x(s(t))\right)s'(t)\right] = \frac{d}{dt}[\vec{T}(s(t))s'(t)]$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \underbrace{\mathcal{K}(s(t))s'(t)^2\vec{n}_0(t)}_{\text{Radialbeschleunigung}} + \underbrace{\vec{T}(s(t))s''(t)}_{\text{Tangentialbeschleunigung}}.$$

Der absolute Wert der auf den Massenpunkt wirkenden Radialkraft ist daher

$$k(t) = m \cdot \mathcal{K}(s(t))s'(t)^2,$$

also gleich dem Produkt aus Masse, Krümmung der Kurve und dem Quadrat der Momentangeschwindigkeit.

9.2 Kurven in expliziter Darstellung

Ist die Kurve C in expliziter Darstellung

$$y = y(x),\ a \leq x \leq b$$

gegeben, so kann man, wenn man $x(t) = t,\ y(t) = y(x)$ setzt und beachtet, daß dann

$$\dot{x}(t) = 1,\ \ddot{x}(t) \equiv 0,\ \dot{y}(t) = y'(x),\ \ddot{y}(t) = y''(x)$$

gilt, direkt fast alles unter 9.1 hergeleitete übertragen (bis auf den Teil 9.1.3).

Satz 9.26 *Sei die Kurve C durch $y = y(x),\ x \in [a, b]$ gegeben, dann erhält man*

- *den Tangentenvektor im Punkt $(x, y(x))$: $\vec{T}(x) = (1, y'(x))$,*
- *Normalenvektor: $\vec{n}(x) = (-y'(x), 1)$,*
- *Tangentensteigung: $y'(x)$,*
- *Bogenlänge: $s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$,*

- *Krümmung:*
$$\mathcal{K}(x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}},$$
- *Krümmungsradius:* $r(x) = \frac{1}{|\mathcal{K}(x)|}$,
- *Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises im Punkt* $(x, y(x))$ *(Evolute):*
$$x_m(x) = x - \frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} y'(x), \quad y_m(x) = y(x) + \frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)}.$$

Beispiel 9.27 Durch $y = \frac{1}{2}x^2, \; 0 \leq x \leq 4$ ist eine ebene Kurve C gegeben. Man berechne:

1. Tangenten- und Normalenvektor,
2. die Länge der Kurve,
3. die Krümmung der Kurve und die Evolute.

Man skizziere die Kurve und ihre Evolute.
Es ist: $y = \frac{1}{2}x^2, \; y' = x, \; y'' = 1.$

1. Tangentenvektor im Punkt $(x, \frac{1}{2}x^2)$: $\vec{T}(x) = (1, x)$,
   Normalenvektor: $\vec{n}(x) = (-x, 1)$.
2. Bogenlänge:
$$\begin{aligned}
s(0,4) &= \int_0^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \\
&= \int_0^4 1 \cdot \sqrt{1 + x^2}\, dx \\
&\overset{p.I.}{=} x\sqrt{1 + x^2}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx \\
&= 4\sqrt{17} - \int_0^4 \sqrt{1 + x^2}\, dx + \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}\right] \\
&= 2\sqrt{17} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} x\Big|_0^4 \\
&= 2\sqrt{17} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} 4.
\end{aligned}$$

3. Krümmung:

$$\mathcal{K}(x) = \frac{y''(x)}{[1+y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Koordinaten der Krümmungskreismittelpunkte (Evolute):

$$x_m(x) = x - \frac{1+y'(x)^2}{y''(x)} y'(x) = x - \frac{1+x^2}{1} \cdot x = -x^3,$$

$$y_m(x) = y(x) + \frac{1+y'(x)^2}{y''(x)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1+x^2}{1} = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

Wertetabelle für C:

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

Wertetabelle zur Evolute:

x	0	1	2	3	4
x_m	0	-1	-8	-27	-64
y_m	1	$\frac{5}{2}$	7	$\frac{29}{2}$	25

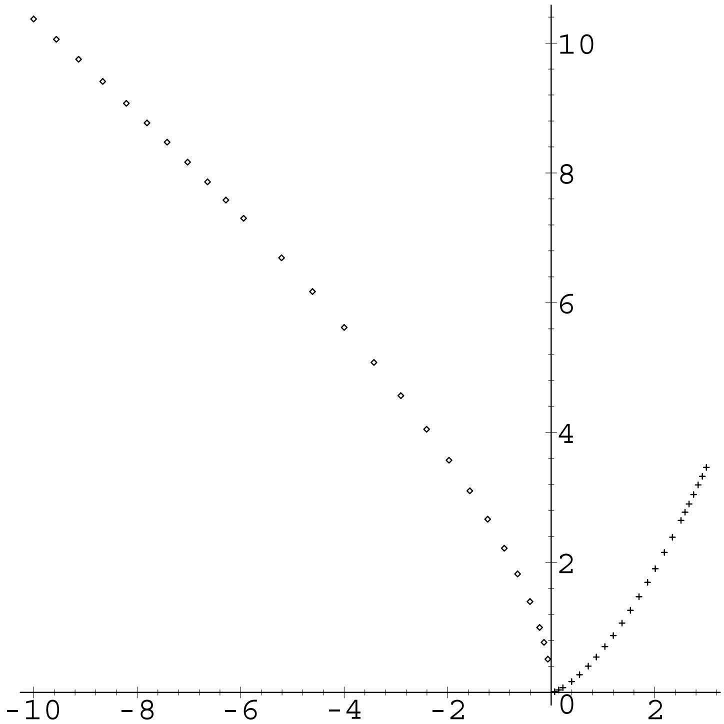

Abbildung 9.19: Beispiel 9.27: ⋄ Evolute, + Evolvente

□

9.3 Ebene Kurven in Polarkoordinatendarstellung

Eine häufig verwendete Darstellungsform ebener Kurven ist die Darstellung in Polarkoordinaten (Abb. 9.20):

$$r = r(\varphi),\ \varphi \in [a, b].$$

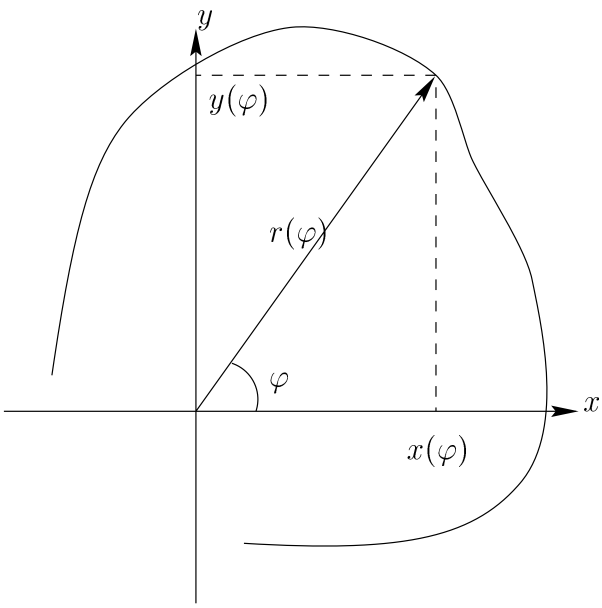

Abbildung 9.20: Polarkoordinaten

Dabei ist in der (x, y)-Ebene:
φ der Winkel, den die positive x-Achse und der Strahl vom Nullpunkt durch den Kurvenpunkt einschließen,
$r = r(\varphi)$ der Abstand des Kurvenpunktes zum Nullpunkt.

Skizze einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve:

Auf den Strahl durch den Nullpunkt mit Winkel φ zur positiven x-Achse wird der Punkt eingetragen, der den Abstand $r(\varphi)$ zum Nullpunkt hat, wenn $r(\varphi) > 0$. Ist $r(\varphi) < 0$, so wird der Punkt in der entgegengesetzten Richtung eingetragen $(\varphi + \pi)$! Selbstverständlich sollte man auch hierbei eventuell vorhandene Symmetrien ausnutzen.

Beispiel 9.28 $r(\varphi) = \cos 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Wegen $r(\varphi + \pi) = r(\varphi)$ ist die Kurve symmetrisch zur x-Achse, so daß man sich zunächst auf $0 \le \varphi \le \pi$ beschränken kann.

Wertetabelle:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$
$r(\varphi)$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

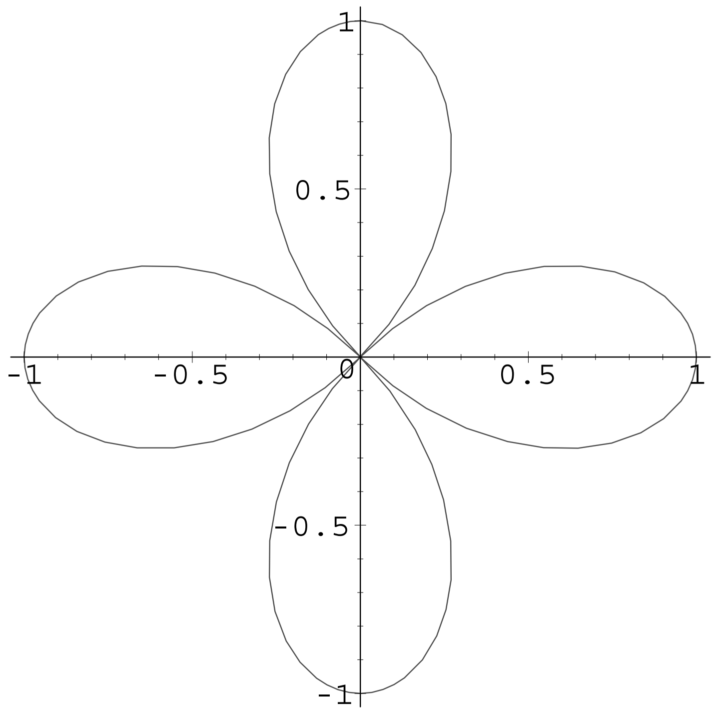

Abbildung 9.21: Beispiel für Polarkoordinaten

□

9.3.1 Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

Offensichtlich ist (s. Abb. 9.20)

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \tag{9.2}$$

und

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \end{cases}$$

Durch (9.2) gelangt man somit zu einer Parameterdarstellung einer in Polarkoordinaten

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [a, b] \tag{9.3}$$

gegebenen Kurve C.

Mit Hilfe der unter 9.1 entwickelten Formeln für eine Kurve in Parameterform gelangt man dann zu entsprechenden Formeln für eine Kurve in Polarkoordinatendarstellung:

Satz 9.29 *Ist also durch (9.3) eine Kurve C gegeben, so folgt:*

- *Tangentenvektor:*

$$\vec{T}(\varphi) = (\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi),$$

- *Normalenvektor:*

$$\vec{n}(\varphi) = (-\dot{r}(\varphi)\sin\varphi - r(\varphi)\cos\varphi, \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi),$$

- *Tangentensteigung:*

$$y' = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \frac{\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi},$$

- *Bogenlänge:*

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\, d\varphi,$$

- *Krümmung:*

$$\mathcal{K}(\varphi) = \frac{r(\varphi)^2 + 2\dot{r}(\varphi)^2 - r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}{[r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

- *Mittelpunkte der Krümmungskreise:*

$$x_m(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi - \frac{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}{r(\varphi)^2 + 2\dot{r}(\varphi)^2 - r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}(r(\varphi)\cos\varphi + \dot{r}(\varphi)\sin\varphi),$$

$$y_m(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi + \frac{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}{r(\varphi)^2 + 2\dot{r}(\varphi)^2 - r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}(\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi),$$

9.3.2 Flächenberechnung (Sektorformel von Leibniz), Steigwinkel

Satz 9.30 *Durch*

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 \, d\varphi$$

wird die Fläche des Sektors berechnet, welcher von der Kurve $r = r(\varphi)$ und den von $(0,0)$ nach $(r(\varphi_1)\cos\varphi_1, r(\varphi_1)\sin\varphi_1)$ bzw. $(r(\varphi_2)\cos\varphi_2, r(\varphi_2)\sin\varphi_2)$ führenden Strecken begrenzt wird (Abb. 9.22).

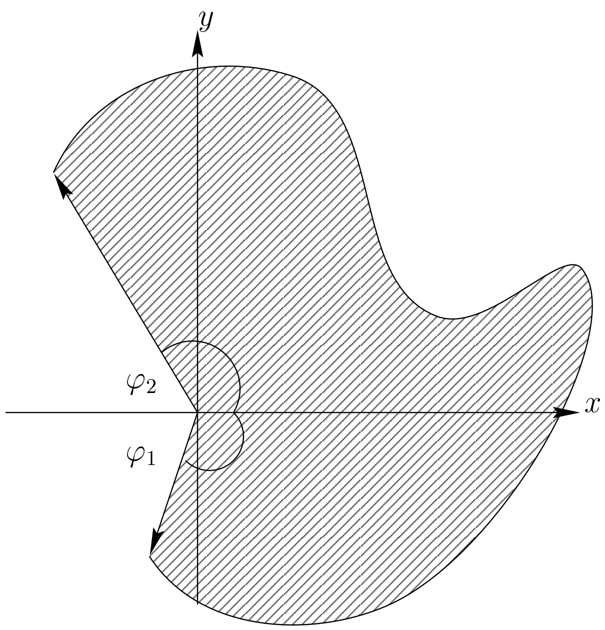

Abbildung 9.22: Flächenformel von Leibniz

Definition 9.31 *Der Winkel $\alpha(\varphi)$, welcher vom Fahrstrahl der durch $r = r(\varphi)$, $a \leq \varphi \leq b$ gegebenen Kurve C und der Tangente der Kurve eingeschlossen wird, wird* Steigwinkel *genannt (Abb. 9.23).*

Wegen

$$\alpha(\varphi) = \beta(\varphi) - \varphi, \quad \tan\beta(\varphi) = \frac{\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$$

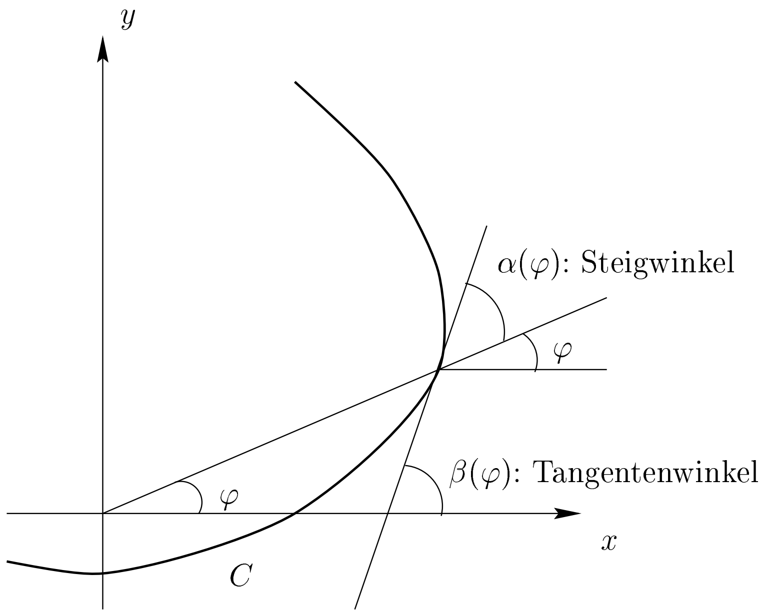

Abbildung 9.23: Steigwinkel

folgt

$$\begin{aligned}
\tan\alpha(\varphi) &= \tan(\beta(\varphi)-\varphi)\\
&= \frac{\tan\beta(\varphi)-\tan\varphi}{1+\tan\varphi\tan\beta(\varphi)}\\
&= \frac{(\dot r(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)\cos\varphi - (\dot r(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)\sin\varphi}{(\dot r(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)\cos\varphi + (\dot r(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)\sin\varphi}\\
&= \frac{r(\varphi)}{\dot r(\varphi)}.
\end{aligned}$$

Beispiel 9.32 1. Durch

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 3x^2y - y^3$$

ist eine ebene Kurve C gegeben. Man berechne den Inhalt der von der Kurve umschlossenen Fläche.

Es ist $(x^2+y^2)^2 = 3x^2y - y^3$. Einführung von Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$$

ergibt:

$$r^4 = 3r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - r^3 \sin^3 \varphi$$

und wegen

$$3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = \sin 3\varphi$$

folgt:

$$r^4 = r^3 \sin 3\varphi,$$

woraus

$$r(\varphi) = \sin 3\varphi$$

folgt. Offenbar wird C einmal durchlaufen, wenn φ von 0 nach 2π läuft. Sektorformel von Leibniz:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\varphi)^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 3\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 6\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Steigwinkel der logarithmischen Spirale

$$r(\varphi) = e^{a\varphi}, \quad a \neq 0.$$

$$\tan \alpha(\varphi) = \frac{r(\varphi)}{\dot{r}(\varphi)} = \frac{e^{a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = \frac{1}{\alpha},$$

der Steigwinkel einer logarithmischen Spirale ist also konstant.

□

Kapitel 10

Reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

10.1 Reelle Funktionen von zwei Variablen

Definition 10.1 (Gebiet) *Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^2$ wird* Gebiet *genannt, wenn*

1. *zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ ein $r > 0$ existiert, so daß die offene Kreisscheibe $\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\} \subset G$ ist* (Offenheit),
2. *je zwei beliebige Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ durch eine ganz in G verlaufende stetige Kurve γ verbindbar sind* (Zusammenhang).

Definition 10.2 *Die Funktion*

$$f : G_f \to \mathbb{R}$$

ordnet jedem Element $(x, y) \in G_f$ (G_f: Definitionsgebiet *von f) genau eine reelle Zahl zu:*

$$f : (x, y) \to f(x, y).$$

Zukünftig wird die Funktion f nur durch eine (oder mehrere) sie definierende Funktionsgleichung(en)

$$z = f(x, y)$$

angegeben.

Beispiel 10.3

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad G_f = \mathbb{R}^2.$$

Schaubild: im $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ werden die Punkte $(x, y, f(x, y))$ eingetragen. Diese erzeugen eine durch $z = f(x, y)$ definierte Fläche (Abb. 10.1).

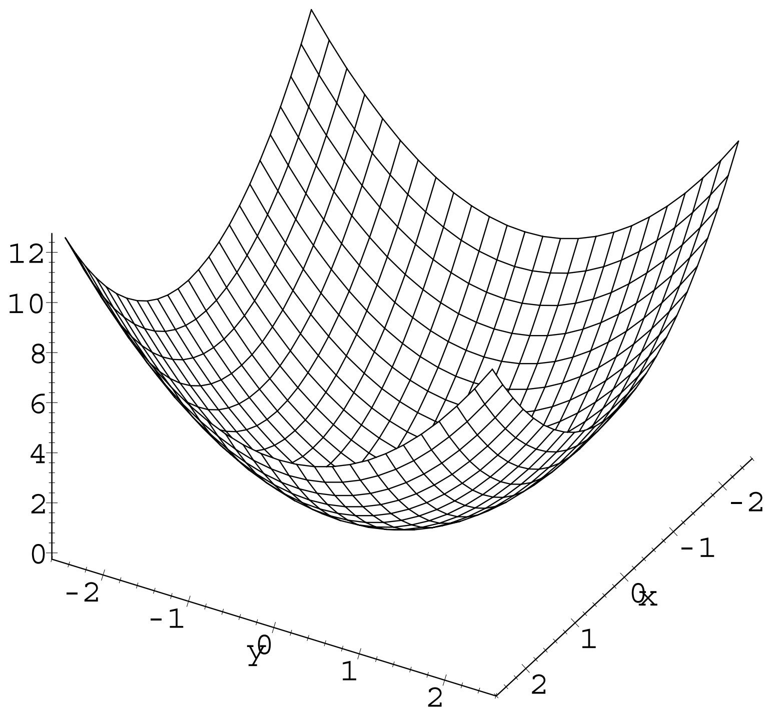

Abbildung 10.1: Beispiel 10.3: Funktion mehrerer Veränderlicher

□

Definition 10.4 (Stetigkeit) *Die Funktion f wird* im Punkt (x_0, y_0) stetig *genannt, wenn*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

gilt.

f wird stetig auf dem Gebiet G *genannt, wenn f in jedem Punkt von G stetig ist.*

Beispiel 10.5 Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{10.1}$$

ist stetig für $(x,y) \neq (0,0)$, aber wegen

$$\lim_{h\to 0} f(h, \alpha h) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha h^2}{h^2 + \alpha^2 h^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \neq 0 = f(0,0) \quad \text{für } \alpha \neq 0$$

ist f bei $(0,0)$ unstetig. □

Definition 10.6 (Niveaulinien) *Die durch $f(x,y) = c$ implizit definierten ebenen Kurven werden* Niveaulinien *der durch $z = f(x,y)$ definierten Fläche genannt.*

Beispiel 10.7

$$z = f(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

Niveaulinien: $x^2 + 4y^2 = c,\ c > 0$ sind die Ellipsen

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{c}}{2}}\right)^2 = 1.$$

□

10.2 Ableitungen

Definition 10.8 *Ist $z = f(x,y)$ auf dem Gebiet G definiert, $(x_0,y_0) \in G$, so heißt f* im Punkt (x_0,y_0) partiell nach x differenzierbar*, wenn*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

existiert, partiell nach y differenzierbar*, wenn*

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

existiert.

Die Funktion $f(x,y)$ heißt auf G partiell nach x bzw. y differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von G partiell nach x bzw. y diffbar ist.*

Die partielle Ableitung nach x bildet man, indem man wie gewohnt nach x ableitet und dabei die Variable y wie eine Konstante behandelt; analog: partielle Ableitung nach y.

Schreibweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y).$$

Für die Funktion (10.1) aus Bsp. 10.5 ist

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{y[(x^2+y^2)-2x^2]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} - 0\right] = 0,$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{(0,0)} = 0.$$

Diese Funktion ist also überall im $\mathbb{R}^2$ partiell nach x und y differenzierbar, obwohl sie bei $(0,0)$ unstetig ist. Partielle Differenzierbarkeit impliziert also noch keine Glätte der Funktion.

Um diesen Mangel zu beseitigen, definiert man

Definition 10.9 *$f(x,y)$ heißt* im Punkt (x_0,y_0) differenzierbar, *wenn $A, B \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $u(x,y)$ existieren mit*

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + u(x,y)$$

und

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Satz 10.10 *Ist $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) differenzierbar, dann ist $f(x, y)$ auch nach x, y partiell differenzierbar, und es gilt:*

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0),$$

wie man sofort erkennt.

Definition 10.11 *Die Funktion f heißt* auf dem Gebiet G differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von G differenzierbar ist.*

Satz 10.12 *Ist f auf G differenzierbar, so folgt unmittelbar aus der Definition, daß f stetig auf G ist und mit $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \in G$ ist dann*

$$\underbrace{f(x, y)}_{=z} - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + u(x, y),$$

also ist dann die Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tangential *zur von f erzeugten Fläche.*
Die Tangentialebene

$$z - z_0 - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

berührt dann die Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0).

Definition 10.13 *Der Normalenvektor der Tangentialebene,*

$$\vec{N} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1),$$

wird die Flächennormale der Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0) *genannt. $\vec{N}$ ist senkrecht zur Fläche.*

Der differentielle Zuwachs dz in der Fläche wird durch die Tangentialebene gegeben. Dies führt zum *Totalen Differential*

$$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy.$$

Anwendung in der Fehlerrechnung:

$$|\Delta z| \leq |f_x(x_0, y_0)||\Delta x| + |f_y(x_0, y_0)||\Delta y|.$$

Eine differenzierbare Funktion $z = f(x, y)$ erzeugt also eine glatte Fläche $\mathcal{F}$.

Ein hinreichendes Kriterium hierfür ist

Satz 10.14 *Besitzt die Funktion auf G stetige partielle Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$, dann ist sie auf G differenzierbar.*

Ist $z = f(x,y)$ auf G differenzierbar, $(x_0, y_0) \in G$, dann erhält man durch $f_x(x_0, y_0)$ bzw. $f_y(x_0, y_0)$ den Anstieg der Fläche im Punkt (x_0, y_0) in x- bzw. in y-Richtung (Abb. 10.2).

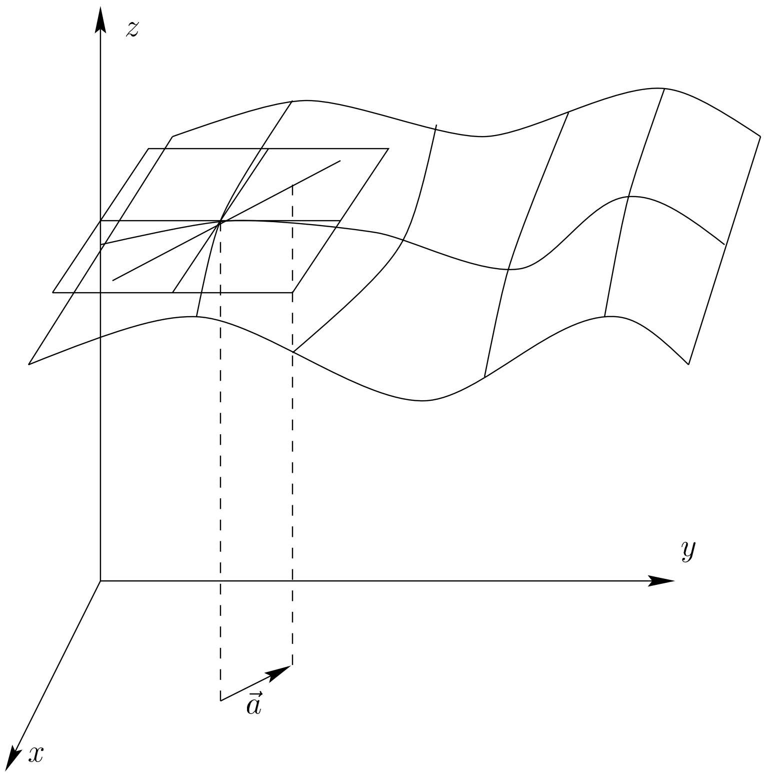

Abbildung 10.2: Ableitung in beliebiger Richtung

Der Anstieg in eine beliebige Richtung, die durch den Vektor $\vec{a} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ gegeben wird, berechnet sich durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[f(x_0 + h\cos\varphi, y_0 + h\sin\varphi) - f(x_0, y_0)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[f_x(x_0, y)h\cos\varphi + f_y(x_0, y_0)h\sin\varphi + u(x_0 + h\cos\varphi, y_0 + h\sin\varphi)\right] \\
&= f_x(x_0, y_0)\cos\varphi + f_y(x_0, y_0)\sin\varphi + \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{u(x_0 + h\cos\varphi, y_0 + h\sin\varphi)}^{\to 0}}{h}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) \cos\varphi + f_y(x_0, y_0) \sin\varphi \\ &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\vec{a}. \end{aligned}$$

Zweckmäßigerweise definiert man

Definition 10.15 (Gradient) *Der Vektor*

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

wird der Gradient von f im Punkt (x, y) *genannt.*

Damit gilt für die Richtungsableitung von $f(x, y)$ im Punkt (x, y) in Richtung von $\vec{a} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x, y) = \text{grad } f(x, y)\vec{a},$$

also das Skalarprodukt zwischen grad $f(x, y)$ und $\vec{a}$.

Da das Skalarprodukt genau dann maximal ist, wenn der Gradient und der Vektor $\vec{a}$ die gleiche Richtung haben, gibt grad $f(x_0, y_0)$ auch die Richtung des *größten Anstiegs* der Fläche im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ an.

grad $f(x_0, y_0)$ ist senkrecht zur Niveaulinie durch (x_0, y_0) (Nachweis folgt im Abschnitt über implizite Funktionen).

Ist $\vec{a} = (a_1, a_2) \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor, so ist

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \frac{\vec{a}}{|a|}.$$

Beispiel 10.16 Durch $z = f(x, y) = x^2 - 2x + 4y^2$, $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$ ist eine räumliche Fläche $\mathcal{F}$ gegeben.

Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = 2x - 2$, $f_y(x, y) = 8y$ sind offenbar stetig im $\mathbb{R}^2$, also ist f differenzierbar im $\mathbb{R}^2$.

- Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 4)$ ist

$$z - f(2, 1) = f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1)$$

$$\Rightarrow z - 4 = 2(x - 2) + 2(y - 1).$$

- Gradient von f: grad $f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x-2, 8y)$.
- Richtungsableitung von f bei $(2,1)$ in Richtung $\vec{a} = (3,4)$:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(2,1) = \text{grad } f(2,1) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (2,8)\frac{(3,4)}{5} = \frac{38}{5}.$$

- Niveaulinien: $f(x,y) = c \Rightarrow x^2 - 2x + 4y^2 = c \Rightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = c+1, \quad (c > -1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{\sqrt{c+1}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{c+1}}{2}}\right)^2 = 1,$$

  also Ellipsen mit Halbachsen $a = \sqrt{c+1}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{c+1}$ und Mittelpunkt $(1,0)$.
- Den stärksten Anstieg der Fläche im Punkt $(2,1)$ erhält man, wenn in der Richtungsableitung $\vec{a} = \text{grad } f(2,1) = (2,8)$ ist, er ist $|\text{grad } f(2,1)| = \sqrt{68}$.

$\square$

Satz 10.17 *Ist $f(x,y)$ auf G differenzierbar, sind $x(t), y(t)$, $t \in [a,b]$ nach t diffbare Funktionen mit $(x(t), y(t)) \in G$, dann ist*

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

eine Funktion auf $[a,b]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) &= \frac{1}{h}[f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))] \\ &= \frac{1}{h}[f_x(x(t),y(t))(x(t+h) - x(t)) + f_y(x(t),y(t))(y(t+h) - y(t)) \\ &\quad + u(x(t+h), y(t+h))]. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\, u(x(t+h), y(t+h)) = 0$$

folgt dann die verallgemeinerte Kettenregel*:*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Ist durch $f(x,y) = c$ eine Niveaulinie von f gegeben und $(x(t), y(t)) = \vec{x}(t)$ eine Parameterdarstellung der Niveaulinie $f(x(t), y(t)) = c$

$$\Rightarrow f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) = \text{grad } f(x(t), y(t))\dot{\vec{x}}(t) = 0.$$

Da $\dot{\vec{x}}(t)$ Tangentenvektor ist, folgt: grad f ist senkrecht zur Niveaulinie.

10.3 Ableitungen höherer Ordnung, Taylorformel

Sind die partiellen Ableitungen $f_x(x,y), f_y(x,y)$ einer in G differenzierbaren Funktion ebenfalls differenzierbar, so kann man die partiellen Ableitungen 2. Ordnung bilden:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} f_x(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f_{xx}(x,y), & \frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f_{yx}(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = f_{xy}(x,y), & \frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = f_{yy}(x,y). \end{array}$$

Satz 10.18 (Schwarz) *Sind die partiellen Ableitungen $f_{xy}(x,y)$ und $f_{yx}(x,y)$ auf G stetig, dann sind sie dort identisch: $f_{xy}(x,y) \equiv f_{yx}(x,y)$.*

Induktiv kann man diese Betrachtung fortsetzen und gelangt so zu den Ableitungen beliebiger Ordnung:

$$\frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}} f(x,y).$$

f wird $(n-k)$-mal nach x und k-mal nach y abgeleitet, $0 \le k \le n$. Auch hier gilt der Satz von Schwarz, d. h. beim Bilden der partiellen Ableitungen kann die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden, wenn sie alle stetig sind.

Es sei nun $f(x,y)$ in G mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $(x_0,y_0) \in G$ und

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

dann erhält man durch mehrmalige Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0+th, y_0+tk)h + f_y(x_0+th, y_0+tk)k, \\ F'(0) &= f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k, \\ &\vdots \\ F^{(j)}(0) &= \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} h^{j-\nu} k^{\nu} \frac{\partial^j}{\partial x^{j-\nu} \partial y^j} f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}, \quad 1 \le j \le n+1. \end{aligned}$$

$F(t)$ ist somit $(n+1)$-mal stetig diffbar. Die Taylorformel für $F(t)$ bei $t=0$ liefert dann, wenn man $h = x - x_0,\ k = y - y_0$ einsetzt und

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} (x-x_0)^{j-\nu} (y-y_0)^{\nu} \frac{\partial^j}{\partial x^{j-\nu} \partial y^j} f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &:= \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

setzt, die *Taylorformel für* $z = f(x, y_0)$ bei (x_0, y_0):

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(x_0,y_0) + R_n(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned} R_n(x,y) &= \frac{1}{(n+1)!} \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} \\ &\quad \cdot f(x_0 + \delta(x-x_0), y_0 + \delta(y-y_0)), \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned}$$

Insbesondere für $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) + R_2(x,y). \end{aligned}$$

10.3.1 Implizite Funktionen

Wie wir schon des öfteren sahen, sind häufig ebene Kurven in der Form

$$f(x,y) = 0,$$

der *impliziten Darstellung*, gegeben.

Z. B. Kreis: $f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, Ellipse: $f(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$, oder die Niveaulinien einer Funktion $z = f(x,y)$: $f(x,y) - c = 0$.

Nur in wenigen einfachen Fällen kann man diese implizit gegebenen Kurven nach y auflösen und das auch nur teilweise (durch algebraische Operationen).

Beispiel 10.19 1. Hyperbel:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,\ a,b > 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

2. $f(x,y) = x + y - e^{x-y} = 0$. Hier ist mit den uns bekannten Methoden keine Auflösung nach y möglich.

□

Wie wir im Kapitel „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ (Kap. 11) sehen werden, erhält man häufig Lösungen in impliziter Form. Schon daher ist es von Interesse, Informationen über den Verlauf der Kurve implizit gegebener Kurven zu erhalten.

Eine Möglichkeit hierzu liefert der

Satz 10.20 (Satz über Implizite Funktionen) *Es sei $F(x,y)$ auf G stetig partiell differenzierbar, $(x_0,y_0) \in G$.*

Ist dann $F(x_0,y_0) = 0$ und $F_y(x_0,y_0) \neq 0$, so existiert ein Intervall (a,b) mit $x_0 \in (a,b)$ und eine Funktion $y = y(x)$, $x \in (a,b)$ mit $y(x_0) = y_0$, $F(x,y(x)) = 0$ und

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}, \quad x \in (a,b).$$

Ist $F_x(x_0,y_0) \neq 0$, $F(x_0,y_0) = 0$; dann existiert ein Intervall (α,β) und eine Funktion $x = x(y)$ mit $x(y_0) = x_0$, $F(x(y),y) = 0$ und

$$x'(y) = -\frac{F_y(x(y),y)}{F_x(x(y),y)}, \quad y \in (\alpha,\beta).$$

Beispiel 10.21 Die Funktion $F(x,y) = x + y - e^{x-y}$ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar.

Durch $F(x,y) = x+y-e^{x-y} = 0, \quad F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$ ist damit wegen $F_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1+e^0 = 2 \neq 0$ eine implizit definierte Kurve gegeben, die lokal nach y auflösbar ist. $y = y(x)$ mit $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$y'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{F_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{F_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1-e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{2} = 0.$$

Man kennt somit schon die Ableitung von $y(x)$ bei $x_0 = \frac{1}{2}$. Da die Funktion $F(x,y)$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist, kann man nun nacheinander $y''\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'''\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$ berechnen:

$$F(x,y(x)) = x + y(x) - e^{x-y(x)} = 0. \quad |\frac{d}{dx}.$$

$$\Rightarrow 1 + y'(x)\left(1 + e^{x-y(x)}\right) - e^{x-y(x)} = 0, \quad (x,y) = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \tag{10.2}$$

$$\Rightarrow 1 + y'\left(\tfrac{1}{2}\right) + y'\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow y'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

Differenziert man (10.2) nochmals nach x:

$$\Rightarrow y''(x)\left(1+e^{x-y(x)}\right)+y'(x)e^{x-y(x)}(1-y'(x))-(1-y'(x)e^{x-y(x)})=0. \quad (10.3)$$

$y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}$ eingesetzt ergibt

$$y''\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2-1=0\Rightarrow y''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}.$$

Indem man die Gleichung (10.3) wieder nach x differenziert und $y''\left(\frac{1}{2}\right), y'\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)$, $x=\frac{1}{2}$ einsetzt, erhält man $y'''\left(\frac{1}{2}\right)$ usw.

Mit Hilfe des Taylorpolynoms erhält man somit die Funktion $y(x)$ näherungsweise. Das Taylorpolynom 2. Grades ist

$$P_2(x)=y\left(\tfrac{1}{2}\right)+y'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}y''\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

So erkennt man z. B., daß $y=y(x)$ bei $x_0=\frac{1}{2}$ ein relatives Minimum besitzt. □

Beispiel 10.22 Man bestimme die relativen Extremwerte der durch

$$F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$$

implizit gegebenen Kurve für $x>0$.

Sei also $x^3+y(x)^3-3xy(x)=0\Rightarrow$ (Differ. nach x):

$$3x^2+y'(x)(3y(x)^2-3x)-3y(x)=0,\quad y'(x_0)=0$$

$$\Rightarrow 3(x_0^2-y(x_0))=0\Rightarrow y_0=y(x_0)=x_0^2,$$

in $F(x,y)=0$ eingesetzt:

$$x_0^3+x_0^6-3x_0^3=0\Rightarrow x_0^3(x_0^3-2)=0\Rightarrow x_0=\sqrt[3]{2}\Rightarrow y_0=\sqrt[3]{4}.$$

Es gibt genau einen kritischen Punkt $(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$. Um zu entscheiden, ob ein Extremum vorliegt, wird $y''(x_0)$ berechnet:

$$6x+y''(x)(3y(x)^2-3x)+y'(x)(6y(x)y'(x)-3)-3y'(x)=0,$$

$\mathrm{x}_0, y_0, y'(x_0)=0$ eingesetzt:

$$\Rightarrow 6\sqrt[3]{2}+y''(\sqrt[3]{2})-3(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2})=0\Rightarrow y''(\sqrt[3]{2})<0$$

$\Rightarrow$ bei (x_0,y_0) besitzt die Kurve ein relatives Maximum.

Natürlich muß man erst noch nachprüfen, ob $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ist, da sonst die obige Rechnung hinfällig wäre.

$$F_y(x,y)=3(y^2-x)\Rightarrow F_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})=3(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2})\neq 0.$$

□

10.4 Relative Extremwerte

Sei $z = f(x,y)$ auf G stetig, $(x_0, y_0) \in G$.

Definition 10.23 *$f(x,y)$ besitzt bei (x_0,y_0) ein* relatives $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, *wenn ein $r > 0$ existiert mit $\left\{ \begin{array}{c} f(x,y) \le f(x_0,y_0) \\ f(x,y) \ge f(x_0,y_0) \end{array} \right\}$ für alle (x,y) mit $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2$.*

Man sagt dann: $f(x,y)$ besitzt ein relatives Extremum *bei (x_0,y_0). Damit besitzen auch die Funktionen $g(x) = f(x,y_0)$ und $h(y) = f(x_0,y)$ ein relatives Extremum bei x_0 bzw. y_0, so daß notwendig (wenn f auf G diffbar ist) $g'(x_0) = f_x(x_0,y_0) = 0$ und $h'(y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ gilt.*

Besitzt $f(x,y)$ stetige partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung, so erhält man aus der Taylorformel bei (x_0,y_0) wegen $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \tfrac{1}{2}\left[A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\right] \\ &\quad + R_2(x,y) \end{aligned}$$

mit

$$A = f_{xx}(x_0,y_0),\ B = f_{xy}(x_0,y_0),\ C = f_{yy}(x_0,y_0)$$

und

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\delta(x-x_0), y_0+\delta(y-y_0)),$$

mit $0 < \delta < 1$.

Mit $x - x_0 = ht,\ y - y_0 = kt$ folgt dann

$$f(x_0+th, y_0+tk) - f(x_0,y_0) = \tfrac{1}{2}t^2[\underbrace{Ak^2 + 2Bhk + Ck^2}_{=:D(h,k)}] + \tfrac{t^3}{3!}\tilde{R}(h,k).$$

Daraus erkennt man:

Satz 10.24 *f besitzt bei (x_0, y_0) ein relatives* $\left\{\begin{array}{c} Maximum \\ Minimum \end{array}\right\}$, *wenn*
$\left\{\begin{array}{c} D(h,k) < 0 \\ D(h,k) > 0 \end{array}\right\}$ *für $(h,k) \neq (0,0)$ ist.*
f besitzt bei (x_0, y_0) kein Extremum, wenn $D(h,k)$ beide Vorzeichen annimmt. Dann wird (x_0, y_0) Sattelpunkt *genannt.*

Nun ist

$$D(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

und damit erhält man:

Satz 10.25 *Sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ ungleich 0, so gilt: f besitzt bei (x_0, y_0) ein(en)* $\left\{\begin{array}{c} Maximum \\ Minimum \\ Sattelpunkt \end{array}\right\}$, *wenn* $\left\{\begin{array}{c} \lambda_1, \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \end{array}\right\}$.

Wegen $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ folgt dann der

Satz 10.26 *Ist die Funktion auf G mindestens dreimal stetig partiell differenzierbar, so erhält man die* kritischen Stellen, *in denen ein Extremum vorliegen kann, aus*

$$f_x(x,y) = 0 \wedge f_y(x,y) = 0.$$

Ist (x_0, y_0) eine kritische Stelle und

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

dann besitzt f bei (x_0, y_0) ein relatives $\left\{\begin{array}{c} Maximum \\ Minimum \end{array}\right\}$, *wenn $D > 0$ und*
$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(y_0, y_0) > 0 \end{array}\right\}$ *ist.*
Ist $D < 0$, so ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt,
ist $D = 0$, so sind weitere Untersuchungen nötig.

Beispiel 10.27 Extremwerte von $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

$f_x = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$, $f_y = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xx} = y[4x^3-6x]e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy} = (1-2y^2)(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$, $f_{yy} = x[4y^3-6y]e^{-x^2-y^2}$.

Kritische Stellen: $f_x = 0 \wedge f_y = 0 \Rightarrow$ (da $e^{-x^2-y^2} > 0$):

(I) $y(1-2x^2) = 0 \wedge$ (II) $x(1-2y^2) = 0$.

(I) $y = 0$, dann folgt aus (II): $x = 0$, also $(0,0)$,
(I) $y \neq 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, dann folgt aus (II): $1 - 2y^2 = 0, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergibt die kritischen Punkte $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1)$.

Nun ist

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x^2-2y^2}[4x^2y^2(2x^2-3)(2y^2-3) - (1-2y^2)^2(1-2x^2)^2], \end{aligned}$$

also $D(0,0) = -1 < 0 \Rightarrow$ bei $(0,0)$ liegt ein Sattelpunkt.

$D(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-2} \cdot 4 > 0 \Rightarrow$ bei $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ besitzt $f(x,y)$ relative Extremwerte und wegen

$$f_{xx}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f_{xx}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{2}e^{-1} < 0$$

ist $f(x,y)$ bei $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ maximal, und wegen

$$f_{xx}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f_{xx}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2}e^{-1} > 0$$

ist $f(x,y)$ bei $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ minimal. □

10.5 Extremwerte unter einer Nebenbedingung, Randextrema

Manchmal ist es nötig, die Extremwerte einer Funktion $z = f(x,y)$ unter einer Nebenbedingung $u(x,y) = 0$ zu bestimmen. So z. B. , wenn das Gebiet G durch eine implizit durch $u(x,y) = 0$ gegebene Kurve berandet ist und man an den Extremwerten von $f(x,y)$ auf dem Rand interessiert ist.

Es seien nun $f(x,y)$, $u(x,y)$ differenzierbar, und es gelte grad $u(x,y) \neq (0,0)$ für alle (x,y) mit $u(x,y) = 0$. Dann erhält man aus dem Satz über implizite Funktionen, daß durch $u(x,y)=0$ eine glatte Kurve erzeugt wird (es wird vorausgesetzt, daß (x,y) existieren mit $u(x,y)=0$).

Sei $\vec{x}(t)=(x(t),y(t))$ eine Parameterdarstellung der Kurve, also $u(x(t),y(t))=0$ und $F(t)=f(x(t),y(t))$, dann sind die relativen Extremwerte von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $u(x,y)=0$ genau die relativen Extremwerte von $F(t)$.

Die kritischen Stellen erhält man durch $F'(t)=f_x\,\dot{x}(t)+f_y\,\dot{y}(t)=0$, also $\operatorname{grad} f(x(t),y(t))\cdot\dot{\vec{x}}(t)=0$.

Da aber auch $\operatorname{grad} u(x(t),y(t))\cdot\dot{\vec{x}}(t)=0$ ist, müssen damit grad f und grad u beide senkrecht zum Tangentenvektor und damit linear abhängig sein. Wegen $\operatorname{grad} u\neq\vec{0}$ gilt dann $\operatorname{grad} f(x,y)+\lambda\operatorname{grad} u=0$ (mit einem von x,y abhängigen λ).

Damit erhält man

Satz 10.28 (Lagrangesche Multiplikatormethode) *Die kritischen Stellen, bei denen die Funktion $f(x,y)$ ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung $u(x,y)=0$ besitzen kann, erhält man aus den Gleichungen*

$$\text{(I) } f_x(x,y)+\lambda u_x(x,y)=0,\quad \text{(II) } f_y(x,y)+\lambda u_y(x,y)=0,\quad \text{(III) } u(x,y)=0.$$

Beispiel 10.29 Man bestimme die Extremwerte von $f(x,y)=x^2y$ unter der Nebenbedingung $u(x,y)=x^2+2y^2-4=0$.

Kritische Punkte: (I) $f_x+\lambda u_x=2xy+2\lambda x=0$, (II) $f_y+\lambda u_y=x^2+4\lambda y=0$, (III) $u(x,y)=x^2+2y^2-4=0$.

(I)$\cdot 2y-$(II)$\cdot x$ ergibt $4xy^2-x^3=x(4y^2-x^2)=0$.

1. $x=0\overset{\text{(III)}}{\Longrightarrow}2y^2=4,\ y=\pm\sqrt{2},\ (0,\pm\sqrt{2})$
2. $x\neq 0\Rightarrow 4y^2=x^2\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x\overset{\text{(III)}}{\Longrightarrow}x^2\cdot\frac{3}{2}=4\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$

$\Rightarrow$ kritische Punkte: $\pm(0,\sqrt{2}),\ \pm\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \pm\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

Nun ist
$f(0,\sqrt{2})=0,\ f(x,y)\geq 0$ in der Nähe von $(0,\sqrt{2})\Rightarrow$ rel. Minimum,
$f(0,-\sqrt{2})=0,\ f(x,y)\leq 0$ in der Nähe von $(0,-\sqrt{2})\Rightarrow$ rel. Maximum,
$f\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\sqrt{\frac{2}{3}},\ f\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Da durch $x^2+2y^2=25$ eine beschränkte Kurve (Ellipse) gegeben ist und $f(x,y)=x^2y$ stetig ist, besitzt f auf der Kurve sowohl ein Maximum als auch ein Minimum, und diese müssen in den kritischen Punkten angenommen werden.

Also besitzt $f(x,y)$ bei $\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ein Maximum und bei $\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ein Minimum.

Da sich die Ellipse $x^2 + 2y^2 = 4$ einfach durch $x(t) = 2\cos t,\ y(t) = \sqrt{2}\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ parametrisieren läßt, kann man die Aufgabe auch folgendermaßen lösen:

$F(t) = f(x(t), y(t)) = 4\sqrt{2}\,\cos^2 t \sin t \Rightarrow F'(t) = 4\sqrt{2}\,(\cos^2 t - 2\sin^2 t)\cos t = 0,\ 0 \le t < 2\pi \Rightarrow$ (I) $\cos t = 0,\ t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ergibt $x = 0,\ y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ krit. Punkte $(0, \pm\sqrt{2})$

(II) $\cos^2 t - 2\sin^2 t = 0 \Rightarrow 3\cos^2 t - 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{3}{2},\ \cos t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sin^2 t = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ krit. Punkte $\pm\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \pm\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ □

10.6 Funktionen von n Variablen

Eine reellwertige Funktion f der n reellen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ordnet jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ (D_f: Definitionsbereich von f) genau eine reelle Zahl zu.

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Auch hier werden wir für die Funktion f nur die sie definierende(n) Gleichung(en) angeben.

Beispiel 10.30 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. □

Zur Verringerung des Schreibaufwandes wird $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gesetzt und damit

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Außer daß im Fall $n > 2$ kein Schaubild mehr möglich ist, läßt sich sonst alles für $f(x,y)$ Hergeleitete direkt übertragen:

Definition 10.31 (Stetigkeit) *$f(\vec{x})$ heißt bei $\vec{x}_0$ stetig, wenn*

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{x}_0| \to 0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

gilt. f heißt auf G stetig, wenn f in jedem Punkt $\vec{x}$ von G stetig ist.

Definition 10.32 (Partielle Ableitung nach der Variablen $x_k,\ k = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} f_{x_k}(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x_1, \ldots, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)], \end{aligned}$$

falls der Grenzwert existiert.

Man bildet also die partielle Ableitung nach x_k, indem man die Funktion wie gewohnt nach x_k ableitet und dabei alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt.

Beispiel 10.33

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{\sum_{k=1}^n x_k^2} = 2x_j \cdot e^{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

□

Definition 10.34 (Differenzierbarkeit) *$f(\vec{x})$ heißt bei $\vec{x}_0$ differenzierbar, wenn*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x}_0)(x_k - \tilde{x}_k) + u(\vec{x})$$

gilt, mit

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{x}_0|\to 0} \frac{u(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \vec{x}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n).$$

$f(\vec{x})$ heißt auf $G \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar, wenn $f(\vec{x})$ in jedem Punkt $\vec{x} \in G$ differenzierbar ist.

Dann besitzt $f(\vec{x})$ das Totale Differential

$$df(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x})\, dx_k.$$

Anwendung in der Fehlerrechnung:

$$|\Delta f(\vec{x}_0)| \leq \sum_{k=1}^n |f_{x_k}(\vec{x}_0)||\Delta x_k|.$$

Definition 10.35 (Gradient von f)

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = (f_{x_1}(\vec{x}), f_{x_2}(\vec{x}), \dots, f_{x_n}(\vec{x})).$$

Ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $|\vec{a}| = 1$, so kann analog zum Fall $n = 2$ auch die Richtungsableitung von f nach $\vec{a}$ gebildet werden, und es ist dann

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{a} \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_{x_k}(\vec{x}).$$

Satz 10.36 (Verallgemeinerte Kettenregel) *Ist $f(\vec{x})$ differenzierbar und sind $x_1(t), \dots, x_n(t)$ nach t differenzierbare Funktionen, $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, so gilt mit $F(t) = f(\vec{x}(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$:*

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\vec{x}(t)) x_k'(t).$$

Sind $x_1(u,v), x_2(u,v), \dots, x_n(u,v)$ partiell nach u und v differenzierbar, $\vec{x}(u,v) = (x_1(u,v), \dots, x_n(u,v))$, so gilt mit $F(u,v) = f(\vec{x}(u,v))$:

$$F_u(u,v) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial}{\partial u} x_k(u,v),$$

$$F_v(u,v) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial}{\partial v} x_k(u,v).$$

Definition 10.37 (Relative Extremwerte) *$f(\vec{x})$ besitzt bei $\vec{x}_0$ ein* relatives $\left\{\begin{array}{c}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{array}\right\}$, *wenn ein $r > 0$ existiert mit* $\left\{\begin{array}{c} f(\vec{x}) \le f(\vec{x}_0) \\ f(\vec{x}) \ge f(\vec{x}_0)\end{array}\right\}$ *für alle $\vec{x}$ mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| \le r$.*

Satz 10.38 *Ist $f(\vec{x})$ differenzierbar und besitzt f bei $\vec{x}_0$ ein relatives Extremum (Maximum oder Minimum), dann gilt*

$$f_{x_1}(\vec{x}_0) = 0,\ f_{x_2}(\vec{x}_0) = 0, \dots,\ f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0.$$

Definition 10.39 (Kritische Punkte) *Punkte $\vec{x}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, in denen $f_{x_k}(\vec{x}_0) = 0$ für $k = 1, \dots, n$ ist, werden* kritische Punkte *genannt.*

Ebenso wie im Fall $n = 2$ kann man auch hier eventuell mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung entscheiden, ob die Funktion in einem kritischen Punkt $\vec{x}_0$ ein Extremum besitzt.

Satz 10.40 *Ist $\vec{x}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ ein kritischer Punkt und*

$$D = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \right)$$

die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von f in $\vec{x}_0$, dann gilt:

- *Besitzt D nur positive Eigenwerte, so hat $f(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ ein relatives Minimum,*
- *Besitzt D nur negative Eigenwerte, so hat $f(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ ein relatives Maximum,*
- *Besitzt D Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens, so hat $f(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt,*
- *Besitzt D mindestens einen Eigenwert $\lambda_i = 0$ ($\Longleftrightarrow$ $|D| = 0$), so ist mit Hilfe von D keine Aussage möglich.*

Es sei hier bemerkt, daß die direkte praktische Anwendbarkeit dieser Sätze sehr beschränkt ist, da beim Vorliegen vieler Variablen und etwas komplizierter Funktionen schon allein die Bestimmung der kritischen Punkte sehr aufwendig und ihre exakte Berechnung häufig nicht möglich ist. Ebenso aufwendig und problematisch wäre die Bestimmung der Eigenwerte von D.

Kapitel 11

Gewöhnliche Differentialgleichungen

11.1 Klassifikation

In der Technik geschieht es häufig, daß man für eine zu bestimmende Funktion $y(x)$ eine Gleichung erhält, in der $x, y(x)$ und deren Ableitungen miteinander verknüpft sind:

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{11.1}$$

Beispiel 11.1 Fallgeschwindigkeit eines Körpers in einem Medium mit Reibungswiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. $v(t)$: Geschwindigkeit, m: Masse, c: Reibungsfaktor, g: Erdanziehung.

Kräftegleichung:

$$m \cdot v'(t) + cv(t)^2 = mg.$$

(Hierbei wurde der Auftrieb vernachlässigt.) □

Beispiel 11.2 Freie Federschwingung eines Massenpunktes. m: Masse, D: Federkonstante, R: Reibungsfaktor, $y(t)$ Weg des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit.

Man erhält die Kräftegleichung

$$my''(t) + mRy'(t) + Dy(t) = 0.$$

(Die Federmasse wurde vernachlässigt.) □

Definition 11.3 *Eine Gleichung der Form (11.1) wird* gewöhnliche Differentialgleichung *(kurz: Dgl.) genannt. Die höchste Ordnung der in der Differentialgleichung auftretenden Ableitung von y wird* Ordnung der Dgl. *genannt.*

Ist die Gleichung nicht nach der höchsten Ableitung aufgelöst, nennt man sie implizit: $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$. *Ist die Gleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst,*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

so nennt man sie explizit.

Beispiel 11.4

1. $y^{(4)} \cdot e^{y-x^2} + \sin(y^{(4)} + y') = 0$: implizite Dgl. 4. Ordnung,
2. $y''' = (y + x - y'')^2$: explizite Dgl. 3. Ordnung.

□

Definition 11.5 *Die Funktion $y(x)$ wird eine* Lösung der Dgl. (11.1) *genannt, wenn*

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$$

gilt.

Beispiel 11.6 $y(x) = \cosh x$ ist eine Lösung der Dgl. $y'' - y = 0$, wie man durch Einsetzen erkennt. □

11.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

11.2.1 Richtungsfeld, Isoklinen, Anfangswertproblem, Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Es wird vorausgesetzt, daß die Dgl. 1. Ordnung in expliziter Form gegeben ist:

$$y' = f(x, y). \tag{11.2}$$

Da $y'(x)$ die Steigung der Tangente im Punkt $(x, y(x))$ angibt, kann man die Gleichung (11.2) geometrisch so deuten, daß jedem Punkt (x, y), in dem $f(x, y)$ definiert ist, eine Steigung zugeordnet wird.

Trägt man in „jedem“ Punkt eine Strecke mit der Steigung $f(x, y)$ ein, so erhält man das zu (11.2) gehörende *Richtungsfeld* (Abb. 11.1).

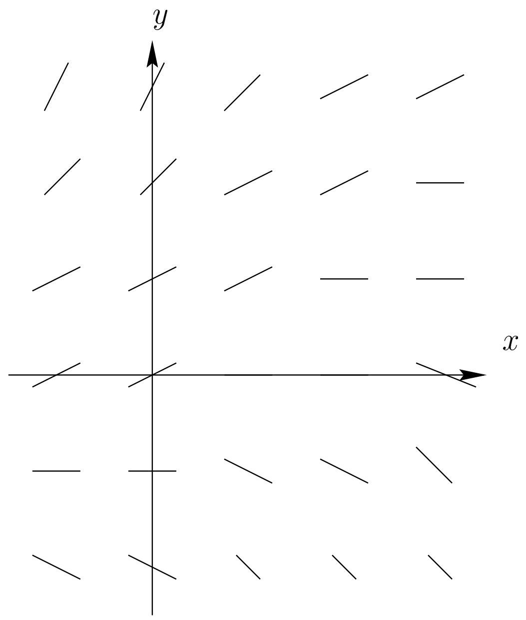

Abbildung 11.1: Richtungsfeld

Definition 11.7 *Linien mit konstanter Steigung, d. h. $y' = f(x,y) = \lambda$, nennt man* Isoklinen. *(Dies sind gerade die Niveaulinien von $f(x,y)$.) Die durch $f(x,y) = \lambda$ gegebene Kurvenschar nennt man* Isoklinenschar.

Beispiel 11.8

$$y' = 1 + y^2. \tag{11.3}$$

Die Isoklinenschar erhält man durch $y' = \lambda = 1 + y^2 \quad (\lambda \geq 1) \Rightarrow y = \pm\sqrt{\lambda - 1}$.

In der Skizze 11.2 sind die Isoklinen und die dazugehörenden Steigungen für $\lambda = 1, 2, 5$ eingetragen. □

Mit $y(x) = \tan x$ gilt

$$y'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + y(x)^2,$$

also ist $y = \tan x$ offenbar eine Lösung der Dgl. (11.3). Das Schaubild von $y = \tan x$ schmiegt sich dem Richtungsfeld an.

Aber auch $y = \tan(x + c)$ ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Dgl., also besitzt die Dgl. ∞ viele Lösungen, eine sogenannte *Lösungsschar*, welche von dem Parameter c abhängt.

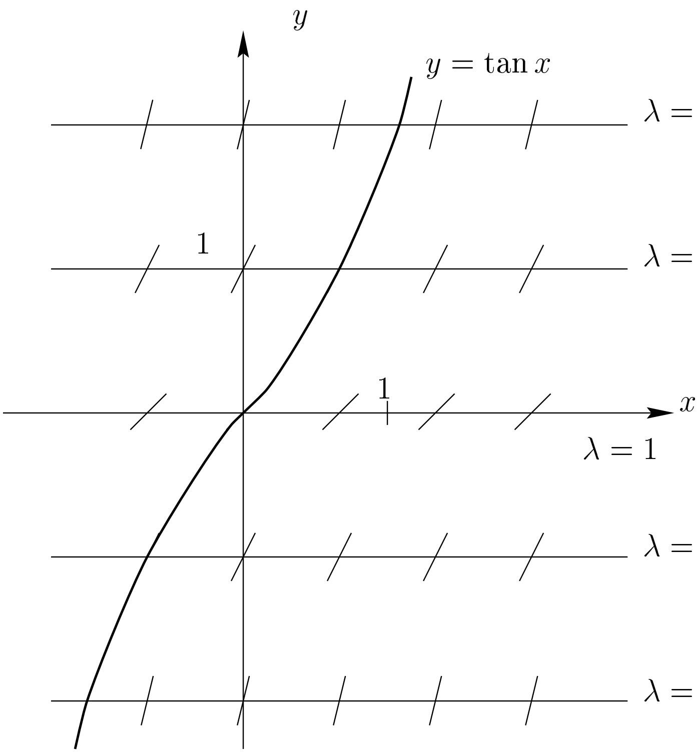

Abbildung 11.2: Isoklinen

Fordert man aber, daß die Lösungskurve durch einen bestimmten Punkt gehen soll, z. B. $y(0) = 0$, d. h. $y(x)$ soll durch den Punkt $(0,0)$ gehen, so ist (wenn man die π-Periodizität von $\tan x$ beachtet) die Lösung eindeutig durch $y(x) = \tan x$ festgelegt.

Dies führt zu den folgenden Begriffen:

Definition 11.9 *Sollen „alle“ Lösungen der Dgl. bestimmt werden, so sagt man: die* allgemeine Lösung der Dgl. (11.2) *ist zu bestimmen.*

Soll hingegen von einer Lösung (bzw. den Lösungen) gefordert werden, daß sie durch den Punkt (x_0, y_0) *geht (bzw. gehen), so sagt man: das* Anfangswertproblem *(kurz:* AWP*)*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{11.4}$$

ist zu lösen.

Leider ist es nicht immer so wie im obigen Beispiel, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

Beispiel 11.10 Das AWP

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \; y(0) = 0$$

besitzt, wie man durch Einsetzen erkennt, die zwei verschiedenen Lösungen $y \equiv 0$ und $y = x^3$, also keine eindeutige Lösung! □

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Anfangswertproblem (11.4) genau eine Lösung besitzt, ist bisher nicht gefunden worden. Allerdings gibt es dafür eine Reihe hinreichender Bedingungen. Die gebräuchlichste ist der Satz von Picard-Lindelöf (Satz 11.12).

Definition 11.11 *Die Funktion* $f(x,y)$ *erfüllt auf dem offenen Rechteck*

$$B = \{(x,y) \mid a < x < y, \; \alpha < y < \beta\} \tag{11.5}$$

eine Lipschitzbedingung bezüglich y, *wenn ein* $L > 0$ *existiert mit*

$$|f(x,y) - f(x,y_1)| \leq L|y - y_1| \quad \text{für alle } (x,y),(x,y_1) \in B.$$

Satz 11.12 (Picard-Lindelöf) *Ist $f(x,y)$ stetig auf (11.5) und erfüllt dort f eine Lipschitzbedingung in y, dann besitzt das Anfangswertproblem (11.4) für jedes $(x_0, y_0) \in B$ genau eine Lösung in B.*

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (auf y angewandt) erhält man dann das leicht zu überprüfende Kriterium

Satz 11.13 *Ist die Funktion $f(x,y)$ auf dem Rechteck B stetig und nach y stetig partiell differenzierbar, dann besitzt das AWP (11.4) für jedes $(x_0, y_0) \in B$ genau eine Lösung in B.*

11.2.2 Integrable Typen von Dgl.n 1. Ordnung

Schon die Lösung einer Dgl. 1. Ordnung $y' = f(x,y)$ ist problematisch, allerdings gibt es bestimmte Typen, welche durch Integration gelöst werden können. Im folgenden werden einige behandelt.

11.2.2.1 Trennbare Dgl.n

Definition 11.14 *Dgl.n, welche man in die Form*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad g(y) \not\equiv 0$$

bringen kann, nennt man trennbar.

Für jede Lösung $y(x)$ gilt dann

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \overset{g(y(x))\not\equiv 0}{\Longrightarrow} \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Integration nach x ergibt

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{g(y(x))} = \int f(x)\,dx.$$

Substitution $y = y(x),\ dy = y'(x)\,dx$:

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Damit erhält man den Lösungsweg

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Allerdings muß man $g(y(x)) \equiv 0$ zunächst ausschließen, d. h. wenn $g(y_0) = 0$ ist, muß bei der Integration $y(x) \equiv y_0$ ausgeschlossen werden.

Weil aber für $y(x) \equiv y_0$ gilt: $y'(x) \equiv 0$, und damit

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y_0) \equiv 0$$

erfüllt ist, ist auch $y(x) \equiv y_0$ eine Lösung der Dgl.

Beispiel 11.15 $y' = xy + x \Rightarrow y' = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{(y+1)}_{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y+1) \quad (y \not\equiv -1) \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int x\,dx \Rightarrow$ Lösungen $\ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$ (und $y \equiv -1$ ist eine weitere Lösung).

$$\Rightarrow |y+1| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c_1} = e^{c_1}e^{\frac{1}{2}x^2} = c_2 e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad c_2 = e^{c_1} > 0.$$

Auflösung des Betrages ergibt

$$y + 1 = \pm c_2 e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = -1 \pm c_2 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Da aber auch $y \equiv -1$ eine Lösung ist, kann man auch $c_2 = 0$ wählen, so daß man alle Lösungen der Dgl. durch

$$y = -1 + ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

erhält. □

11.2.2.2 Dgl.n, welche sich durch einfache Substitutionen in trennbare überführen lassen

1. **Dgl.n der Form**

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{11.6}$$

(in der Literatur unter verschiedenen Namen geführt: *homogene, gleichgradige, Ähnlichkeits-Dgl.*)

Läßt sich eine Dgl. in die Form (11.6) bringen, so substituiert man $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, kurz $z = \frac{y}{x}$. Dann ist $y = xz$ und damit $y' = xz' + z$. Setzt man dies in $y' = f(\frac{y}{x})$ ein, so erhält man die trennbare Dgl. in z:

$$xz' = f(z) - z \Longrightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

Integration und Rücksubstitution $z = \frac{y}{x}$.

Beispiel 11.16 $x^2y' = y^2 + xy + x^2 \Rightarrow y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} + 1 = f(\frac{y}{x})$. Subst. $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz,\ y' = xz' + z \Rightarrow xz' + z = z^2 + z + 1 \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$ (Trennung der Variablen) $\Rightarrow \frac{dz}{z^2+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan z = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \tan(\ln|x| + c)$, Rücksubst. $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan(\ln|x| + c)$. □

2. **Dgl.n der Form**

$$y' = f(ax + by + c),\ b \neq 0 \tag{11.7}$$

Hier wird $z = ax + by + c$ substituiert. Dann ist $z' = a + by'$, also $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$. Dies in die Dgl. (11.7) eingesetzt, ergibt die trennbare Dgl. in z

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z) \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) - a.$$

Lösen und Rücksubstituieren.

Beispiel 11.17 $y' = (y + x + 2)^2$, Subst. $z = y + x + 2 \Rightarrow z' = y' + 1 \Rightarrow y' = z' - 1 \Rightarrow z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan z = x + c \Rightarrow z = \tan(x + c)$. Rücksubst.: $y + x + 2 = \tan(x + c) \Rightarrow y = \tan(x + c) - x - 2$. □

3. **Dgl.n der Form**

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \quad (b,\beta) \neq (0,0). \tag{11.8}$$

Für die Dgl. (11.8) sei vorausgesetzt, daß b und β nicht beide gleich Null sind. Andernfalls wäre die rechte Seite nur von x abhängig und die Dgl. schon trennbar.

Zur Lösung dieses Typs unterscheidet man zwei Fälle:

(a) $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$. Dann ist entweder $(a,b) = k(\alpha,\beta)$ oder $(\alpha,\beta) = l(a,b)$. O. E. kann man $b \neq 0$ und $(\alpha,\beta) = l(a,b)$ annehmen. Dann ist $\alpha x + \beta y = l(ax+by)$,

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{l(ax+by)+\gamma}\right) = g(ax+by),$$

also vom Typ 2 und kann daher durch die Substitution $z = ax+by$ gelöst werden.

(b) $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$. Sind $c,\gamma = 0$, dann ist

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{\alpha+\beta\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

also vom Typ 1 und kann durch die Substitution $z = \frac{y}{x}$ gelöst werden. Ist $(c,\gamma) \neq (0,0)$, dann schneiden sich die Geraden $ax+by+c=0$, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (wegen $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$) in einem Punkt (x_0, y_0). Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems durch $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ in den Schnittpunkt der Geraden, dann ist

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = v'(u)$$

und somit

$$v' = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{\alpha+\beta\frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right).$$

Die Dgl. ist dann durch die weitere Substitution $z = \frac{v}{u}$ zu lösen.

Beispiel 11.18 $y' = \dfrac{x-y}{x+y+2}$. Hier ist $a = 1$, $b = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Schnittpunkt der Geraden:

$$\begin{array}{lcl} x-y & = & 0 \\ x+y+2 & = & 0 \end{array} \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x_0=-1,\ y_0=-1.$$

Subst. $u=x-x_0=x+1,\ v=y-y_0=y+1 \Rightarrow y'(x)=v'(u),\ x=u-1,\ y=v-1$

$$\Rightarrow v' = \frac{u-1-(v-1)}{u-1+v-1+2} = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}},$$

$z=\frac{v}{u} \Rightarrow v=uz,\ v'=uz'+z \Rightarrow uz'+z=\frac{1-z}{1+z} \Rightarrow u\frac{dz}{du}=\frac{1-z}{1+z}-z=-\frac{z^2+2z-1}{z+1} \Rightarrow$ (für $z \not\equiv -1\pm\sqrt{2}$)

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(z+1)}{z^2+2z-1}\,dz = -\int \frac{du}{u}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = -\ln|u|+c_1$ und $z\equiv -1\pm\sqrt{2}$ sind weitere Lösungen.
$\Rightarrow \ln|z^2+2z-1| = \ln\frac{1}{u^2}+c_2 \Rightarrow |z^2+2z-1|=\frac{c_3}{u^2}$ $(c_3=e^{c_2}>0)$.
Löst man den Betrag auf und beachtet, daß $z\equiv -1\pm\sqrt{2}$ ebenfalls Lösungen sind (also $c_3=0$ zulässig), so erhält man $z^2+2z-1=\frac{c}{u^2}$, $c\in\mathbb{R}$. Rücksubst. $z=\frac{v}{u}=\frac{y+1}{x+1}$, $u=x+1$

$$\Rightarrow \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2 + 2\frac{y+1}{x+1} - 1 = \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow (y+1)^2+2(y+1)(x+1)-(x+1)^2=c.$$

□

Beispiel 11.19 $y'=\dfrac{2x-y}{2y-4x+1}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=0$. Mit $z=2x-y$ ist dann $z'=2-y'$, $y'=2-z'$ und $2y-4x=-2z$, also $2-z'=\frac{z}{1-2z} \Rightarrow z'=\frac{dz}{dx}=2+\frac{z}{2z-1}=\frac{5z-2}{2z-1} \overset{z\not\equiv\frac{2}{5}}{\Longrightarrow} \int\frac{2z-1}{5z-2}\,dz=\int dx \Rightarrow \frac{1}{5}\int\left(2-\frac{1}{5}\,\frac{1}{z-\frac{2}{5}}\right)dz=\frac{2}{5}z-\frac{1}{25}\ln|z-\frac{2}{5}|=x+c$, aber auch $z=\frac{2}{5}$ ist Lösung. Rücksubstitution $z=2x-y$:
$\frac{2}{5}(2x-y)-\frac{1}{25}\ln|2x-y-\frac{2}{5}|=x+c$ und $2x-y=\frac{2}{5}$ sind die Lösungen. □

11.2.2.3 Lineare Dgl. 1. Ordnung

Bei *linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung* treten y und y' nur linear auf:

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x) \not\equiv 0.$$

Divison durch $a(x)$ ergibt die *Normalform der linearen Dgl. 1. Ordnung*:

$$y' + p(x)y = s(x), \quad p(x) = \frac{b(x)}{a(x)},\ s(x) = \frac{c(x)}{a(x)}. \tag{11.9}$$

Man nennt sie *homogen*, wenn $s(x) \equiv 0$ ist, also

$$y' + p(x)y = 0. \tag{11.10}$$

Ist $s(x) \not\equiv 0$, so wird die Dgl. (11.9) *inhomogen* genannt.

Wie man fast unmittelbar sieht, gilt der

Satz 11.20 *Ist y_p eine spezielle und y_A die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (11.9) und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. (11.10), so gilt*

$$y_A = y_h + y_p.$$

Die homogene Dgl. (11.10) ist offensichtlich trennbar $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \overset{y\not\equiv 0}{\Longrightarrow} \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx + c_1$ (und $y \equiv 0$ ist eine weitere Lösung.) Damit ist

$$|y| = c_2 e^{-\int p(x)\,dx}, \quad (c_2 = e^{c_1}).$$

Auflösung des Betrags und $y \equiv 0$ ergibt:

$$y_h = ce^{-\int p(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Lösung der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstante

Zur Lösung von (11.9) macht man den Ansatz

$$y = c(x)e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow y' = c'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Setzt man dies in die Dgl. ein so folgt

$$
\begin{aligned}
& c'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)c(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)e^{-\int p(x)\,dx} = s(x) \\
& \Rightarrow c'(x)e^{-\int p(x)\,dx} = s(x) \Rightarrow c'(x) = s(x)e^{\int p(x)\,dx},
\end{aligned}
$$

also ist

$$c(x) = \int s(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx \Rightarrow y_p = e^{-\int p(x)\,dx}\int s(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx.$$

Wegen $y_A = y_h + y_p$ erhält man dann die *Lösungsformel* für die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (11.9):

$$y_A = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int s(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right]. \tag{11.11}$$

Beispiel 11.21 $y' + 2xy = x$. Lösungsformel (11.11) $\Rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
y_A &= e^{-\int 2x\,dx}\left[\int xe^{\int 2x\,dx}\,dx + c\right] \\
&= e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx + c\right] \\
&= e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right] \\
&= ce^{-x^2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

11.2.2.4 In lineare Dgl.n überführbare Dgl.n

1. Bernoullische Dgl.

$$y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, 1.$$

Die Substitution $u = y^{1-\alpha}$, $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $y' = \frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}u'$ führt die Bernoullische Dgl. in eine lineare Dgl. in u über:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}u' + a(x)u^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \mid \cdot u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
& \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}u' + a(x)u + b(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Lösung wie oben und Rücksubstitution $u = y^{1-\alpha}$.

Beispiel 11.22 $y' + \frac{1}{x}y - x^2\sqrt[3]{y} = 0$, also $y' + \frac{1}{x}y - x^2y^{\frac{1}{3}} = 0$. ($\alpha = \frac{1}{3}$) Subst. $u = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = u^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u'$, in die Dgl. eingesetzt ergibt: $\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u' + \frac{1}{x}u^{\frac{3}{2}} - xu^{\frac{1}{2}} = 0 \,|\, \cdot u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}u' + \frac{1}{x}u - x = 0 \Rightarrow u' + \frac{2}{3}\frac{1}{x}u = \frac{2}{3}x$ (lin. Dgl.).
Lösungsformel:

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x}\,dx}\left[\int\frac{2}{3}xe^{\frac{2}{3}\int\frac{1}{x}\,dx}\,dx + c\right]\\
&= x^{-\frac{2}{3}}\left[\int\frac{2}{3}xx^{\frac{2}{3}}dx + c\right]\\
&= x^{-\frac{2}{3}}\left[\int\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}\,dx + c\right]\\
&= x^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{4}x^{\frac{8}{3}} + c\right]\\
&= cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^2.
\end{aligned}$$

Rücksubst. $u = y^{\frac{2}{3}} = cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow y = \left[cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^2\right]^{\frac{3}{2}}$. □

2. RICCATIsche Dgl.

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x).$$

Ein generelles Lösungsverfahren ist nicht bekannt. Hat man aber auf irgendeine Art eine spezielle Lösung y_1 ermittelt, so führt die Substitution $u = \frac{1}{y-y_1}$ die Riccatische Dgl. in eine lineare Dgl. in u über. $u = \frac{1}{y-y_1} \Rightarrow y = \frac{1}{u} + y_1$, $y' = -\frac{1}{u^2}u' + y_1' \Rightarrow -\frac{1}{u^2}u' + y_1' + a(x)\left[\frac{1}{u} + y_1\right] + b(x)\left[\frac{1}{u^2} + \frac{2y_1}{u} + y_1^2\right] = c(x)$ und wegen $y_1 + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 = c(x)$ folgt

$$-\frac{u'}{u^2} + a(x)\frac{1}{u} + b(x)\left[\frac{1}{u^2} + \frac{2y_1}{u}\right] = 0 \,|\, \cdot(-u^2)$$

$$u' - [a(x) + 2y_1b(x)]\,u = b(x) \quad \text{(lineare Dgl. 1. Ordnung)}$$

Lösung und Rücksubstitution.

Beispiel 11.23 $y' + \frac{2}{x}y + y^2 = \frac{2}{x^2}$. Man erkennt durch Einsetzen, daß $y_1 = \frac{1}{x}$ eine spezielle Lösung ist.

Subst. $u = \frac{1}{y-\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{u} + \frac{1}{x},\ y' = -\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{x^2} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{u} + \frac{2}{ux} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{xu} = 0, \mid \ \cdot (-u^2) \\
&\Rightarrow \quad u' - \frac{4}{x}u = 1.
\end{aligned}$$

Lösungsformel

$$\begin{aligned}
u &= e^{4\int \frac{dx}{x}} \left[\int e^{-4\int \frac{dx}{x}}\, dx + c\right] \\
&= x^4 \left[\int x^{-4}\, dx + c\right] \\
&= x^4 \left[-\frac{1}{3}x^{-3} + c\right] \\
&= cx^4 - \frac{1}{3}x.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution: $y = \frac{1}{u} + \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{cx^4 - \frac{1}{3}x} + \frac{1}{x}$. □

Die Riccati-Dgl. hat eine gewisse Bedeutung, da sie (wie wir weiter unten sehen werden) eng mit der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung zusammenhängt.

11.2.2.5 Exakte Dgl., integrierender Faktor

Vorbemerkung: Ist $f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion und $y = y(x)$ eine (lokale) Darstellung einer Niveaulinie von $z = f(x, y)$, d. h.

$$f(x, y(x)) = c,$$

dann gilt

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

also erfüllt $y(x)$ die Dgl.

$$y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)},$$

und umgekehrt stellt jede Lösung dieser Dgl. eine Niveaulinie von $f(x,y)$ dar.

Dies führt zur sogenannten *exakten Differentialgleichung.*

Sei die Dgl.

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

gegeben, dann schreibt man sie auch, indem man $y' = \frac{dy}{dx}$ setzt und die Dgl. mit $Q(x,y)\,dx$ multipliziert, in der Form

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Wenn man nun eine Funktion $f(x,y)$ findet, mit $f_x(x,y) = P(x,y) \wedge f_y(x,y) = Q(x,y)$, dann folgt aus der Vorbemerkung, daß genau die Niveaulinien von f, also

$$f(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen der Dgl. sind.

Unter der Voraussetzung, daß $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ stetige partielle Ableitungen besitzen, ist die Frage, ob ein solches $f(x,y)$ existiert, leicht zu beantworten:

Ist $f_x = P \wedge f_y = Q \Longrightarrow f_{yx} = P_y \wedge f_{xy} = Q_x$.

Nach dem Satz von Schwarz muß dann $f_{yx} = f_{xy}$, also

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \tag{11.12}$$

sein, und umgekehrt gilt, wenn (11.12) gilt, mit $f(x,y) = \int P(x,y)\,dx$:

$$f_x(x,y) = P(x,y)$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx = \int P_y(x,y)\,dx = \int Q_x(x,y)\,dx = Q(x,y),$$

(wenn man die Integrationskonstante geeignet wählt!)

Definition 11.24 *Die Differentialgleichung*

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{11.13}$$

bzw.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

wird exakt *genannt, wenn*

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \tag{11.14}$$

ist.

Somit haben wir erhalten:

Satz 11.25 *Ist die Dgl. (11.13) bzw. (11.14) exakt, dann existiert eine Funktion $f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = P(x,y)$, $f_y(x,y) = Q(x,y)$ und die Lösungen der Differentialgleichung sind die Niveaulinien von $f(x,y)$, also*

$$f(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f berechnet man dann durch

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

und bestimmt die eventuell von y abhängige Integrationskonstante $\varphi(y)$ durch

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

oder

$$f(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \psi(x),$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)\,dy + \psi'(x) = P(x,y).$$

Beispiel 11.26

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x} + 1}{\ln x - \frac{x}{y} + 1}, \quad \text{mit } y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(\ln x - \frac{x}{y} - 1\right)\, dy = \left(\ln y - \frac{y}{x} + 1\right)\, dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{y}{x} - \ln y - 1\right)}_{P(x,y)}\, dx + \underbrace{\left(\ln x - \frac{x}{y} + 1\right)}_{Q(x,y)}\, dy = 0.$$

Nun ist $P_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x} - \ln y - 1\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ und $Q(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x - \frac{x}{y} + 1\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, also $P_y = Q_x$, damit ist die Dgl. exakt.

Bestimmung von $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int P(x,y)\, dx + \varphi(y) \\ &= \int \left(\frac{y}{x} - \ln y - 1\right)\, dx + \varphi(y) \\ &= y \ln x - x \ln y - x + \varphi(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(y \ln x - x \ln y - x) + \varphi'(y) \\ &= \ln x - \frac{x}{y} + \varphi'(y) = Q(x,y) \\ &= \ln x - \frac{y}{x} + 1, \\ \Rightarrow \varphi'(y) &= 1 \\ \Rightarrow \varphi(y) &= y, \end{aligned}$$

also

$$f(x,y) = y \ln x - x \ln y - x + y.$$

Lösung der Dgl. $f(x,y) = c$:

$$y \ln x - x \ln y - x + y = c.$$

Wir behandeln nochmals diese Dgl., aber weil uns die mehrfachen Brüche stören, erweitern wir zunächst rechts mit xy:

$$y' = \frac{xy\ln y - y^2 + yx}{xy\ln x - x^2 + yx}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y^2 - xy\ln y - yx)}_{P}\, dx + \underbrace{(xy\ln x - x^2 + yx)}_{Q}\, dy = 0.$$

$$\Rightarrow P_y = 2y - x\ln y - 2x \not\equiv Q_x = y\ln x + 2y - 2x,$$

und die Dgl. ist nun nicht mehr exakt! (Eine leidvolle Erfahrung mancher Klausurteilnehmer.)

Wenn man allerdings diese nicht exakte Dgl. mit dem Faktor

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$$

multipliziert, wird sie wieder exakt. □

Also liegt die Frage nahe:

Existiert zu einer nichtexakten Dgl. (11.14) eine Funktion $\mu(x, y)$, so daß $\mu P\, dx + \mu Q\, dy = 0$ exakt ist?

Definition 11.27 *Eine solche Funktion $\mu(x, y)$ nennt man dann einen* integrierenden Faktor.

Nun ist $\mu(x, y)$ integrierender Faktor $\iff$ $\mu P\, dx + \mu Q\, dy = 0$ exakt $\iff$ $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ $\iff$

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \tag{11.15}$$

Die Gleichung (11.15) ist eine *lineare partielle Dgl.*, und sie besitzt Lösungen $\mu(x, y)$, wenn P, Q stetige partielle Ableitungen besitzen. Allerdings ist sie praktisch schwerer zu lösen als eine gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung.

Doch kann man probieren, ob ein integrierender Faktor μ existiert, der nur von einer Variablen abhängt:

- $\mu = \mu(x),\ \mu_y \equiv 0 \iff \mu P_y = \mu'(x)Q + \mu Q_x$

$$\iff \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q} \quad \text{ist nicht von } y \text{ abhängig } \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{Q}\,dx},$$

- $\mu = \mu(y),\ \mu_x \equiv 0 \iff \mu'(y)P + \mu P_y = \mu Q_x$

$$\iff \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P} \quad \text{ist nicht von } x \text{ abhängig } \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{Q}\,dy},$$

Beispiel 11.28 $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0,\ P = 2y^2 + 3x,\ Q = 2xy.$

$$\Rightarrow P_y = 4y, \quad Q_x = 2y \Rightarrow \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ ex. integrierender Faktor $\mu(x)$ mit $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$

$$\Rightarrow \underbrace{x(2y^3 + 3x)}_{P}\,dx + \underbrace{2x^2y}_{Q}\,dy = 0 \text{ ist exakt.}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \tilde{Q}(x,y)\,dy + \varphi(x) \\
&= \int 2x^2y\,dy + \varphi(x) \\
&= x^2y^2 + \varphi(x), \\
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + \varphi(x)) \\
&= 2xy^2 + \varphi'(x) \\
&= 2xy^2 + 3x^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 \Rightarrow c = x^2y^2 + x^3$ ist Lösung der Dgl. □

Beispiel 11.29 $\underbrace{(2x + y^2)}_{P}\,dx + \underbrace{(x^2 + xy^2 + 2xy + 1)}_{Q}\,dy = e.$

$$P_y = 2y, \quad Q_x = 2x + y^2 + 2y \Rightarrow \frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2x + y^2}{2x + y^2} = 1$$

(nicht von x abhängig.) $\Rightarrow$ ex. $\mu(y) : \frac{\mu'}{\mu} = e^{\int 1\,dy} = e^y \Rightarrow e^y(2x + y^2)\,dx + e^y(x^2 + xy^2 + 2xy + 1)\,dy$ ist exakt, Lösung:

$$e^y(x^2 + xy^2 + 2xy) = c.$$

□

11.2.3 Ebene Kurvenscharen, isogonale und orthogonale Trajektorien

Die allgemeinde Lösung einer Dgl. 1. Ordnung hängt i.a. von einem Parameter (der Integrationskonstanten) ab und bildet damit eine *Kurvenschar*:

$$F(x, y, c) = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ist andererseits eine Kurvenschar

$$G(x, y, \lambda) = 0, \quad \lambda\text{: Scharparameter} \tag{11.16}$$

gegeben, so kann man eventuell (wenn $G_y(x, y) \neq 0$) aus (11.16) und

$$\frac{d}{dx} G(x, y(x), \lambda) = G_x(x, y) + G_y(x, y, \lambda)y' = 0$$

den Parameter λ eliminieren und erhält eine Dgl. der Kurvenschar.

Beispiel 11.30 $G(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0.$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[(x-\lambda)^2 + y(x)^2 - \lambda^2] = 2(x - \lambda) + 2yy' = 0 \\
&\quad \Rightarrow \quad \lambda = x + 2yy' \\
&\quad \Rightarrow \quad (x - x - yy')^2 + y^2 - (x + yy')^2 = 0 \\
&\quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \\
&\quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \text{ist eine Dgl. der Kurvenschar.}
\end{aligned}$$

□

Es sei nun eine Kurvenschar $F(x, y, \lambda) = 0$ mit der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ gegeben.

Definition 11.31 *Die Schar derjenigen Kurven, welche jede Kurve der Schar*

$$F(x, y, \lambda) = 0 \tag{11.17}$$

unter dem festen Winkel α schneiden, wird die Schar der isogonalen Trajektorien $G(x, y, \mu) = 0$ mit Winkel α *zu (11.17) genannt.*

Ist nun $y' = f(x, y)$ eine Dgl. zur Kurvenschar $G(x, y, \mu) = 0$ und (x_0, y_0) ein beliebiger Schnittpunkt einer Kurve der Schar $F(x, y, \lambda) = 0$ mit einer Kurve der Schar $G(x, y, \mu) = 0$, so sind die Tangentenwinkel

$$y_1'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad y_2'(x_0) = h(x_0, y_0)$$

und damit $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{c} = \tan\alpha = \frac{y_1'(x_0) - y_2'(x_0)}{1 + y_1'(x_0)y_2'(x_0)} = \frac{f(x_0, y_0) - h(x_0, y_0)}{1 + f(x_0, y_0)h(x_0, y_0)}$$

$$\Rightarrow h(x_0, y_0) = \frac{cf(x_0, y_0) - 1}{c + f(x_0, y_0)}.$$

Da (x_0, y_0) beliebig ist, erhält man:

Satz 11.32 *Ist $F(x, y, \lambda) = 0$ eine Kurvenschar mit der Dgl. $y' = f(x, y)$, so erhält man durch*

$$y' = \frac{cf(x, y) - 1}{c + f(x, y)}, \quad \frac{1}{c} = \tan\alpha$$

die Dgl. der isogonalen Trajektorien.

Läßt man nun α gegen $\frac{\pi}{2}$ gehen, also sucht man zu der gegebenen Kurvenschar diejenigen Kurven, welche die gegebene Kurvenschar stets senkrecht schneiden, so sind die *orthogonalen Trajektorien* der Kurvenschar zu bestimmen.
Wenn α gegen $\frac{\pi}{2}$ geht, so strebt $c = \frac{1}{\tan\alpha}$ gegen 0, und man erhält daher

Satz 11.33 *Ist $y' = f(x, y)$ eine Dgl. einer Kurvenschar, so ist die Dgl. der orthogonalen Trajektorien*

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Beispiel 11.34 Gesucht sind die orthogonalen Trajektorien der Kreisschar

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - \lambda^2) = 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \quad \text{Dgl. der Kreisschar.}$$

$\Rightarrow y' = \frac{y}{x}$ ist die Dgl. der orthogonalen Trajektorien. $\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = \mu x$ ist die Schar der orthogonalen Trajektorien (Abb. 11.3). □

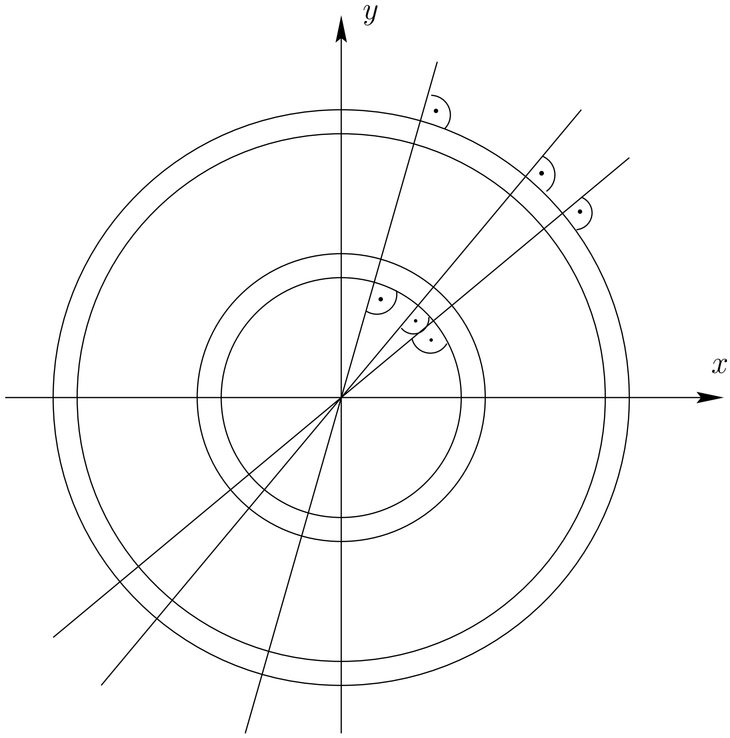

Abbildung 11.3: Trajektorien

11.2.4 Singuläre Lösungen

Die allgemeine Lösung einer Dgl. 1. Ordnung ist von einem Parameter c abhängig und bildet eine Kurvenschar $y = y(x, c)$.

Es ist aber möglich, daß damit (und selbst mit $\lim_{c\to\pm\infty} y(x, c)$) nicht alle Lösungen der Dgl. bestimmt sind.

Definition 11.35 *Lösungen, die nicht in der Schar $y = y(x, c)$ und eventuell $y(x) = \lim_{c\to\pm\infty} y(x, c)$ enthalten sind, nennt man* singuläre Lösungen.

Diese treten z.B. dann auf, wenn die Lösungsschar $y(x, c)$ der Dgl. eine Hüllkurve besitzt. Diese ist dann eine singuläre Lösung der Dgl.

Beispiel 11.36 $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ (trennbare Dgl.)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2} \\
\Rightarrow\quad & (y \not\equiv \pm 1) \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int dx \\
\Rightarrow\quad & -\sqrt{1-y^2} = x + c \\
\Rightarrow\quad & (x+c)^2 + y^2 = 1,
\end{aligned}$$

aber $y \equiv \pm 1$ sind weitere, singuläre Lösungen.

Die allgemeine Lösung sind die Kreise mit Radius 1 und Mittelpunkt auf der x-Achse, die von den Geraden $y \equiv \pm 1$ eingehüllt werden. □

Ein weiteres Beispiel ist die *Clairotsche Dgl.* $y = xy' + f(y')$, f eine stetig diffbare Funktion.

Man löst diese durch Differenzieren:

$$y' = y' + y''(x + f'(y')) \Rightarrow y'' \cdot (x + f'(y')) \equiv 0,$$

also entweder $y \equiv 0 \Rightarrow y = ax + b,\ y' = a$ in Dgl. eingesetzt ergibt $y = ax + f(a)$ die allgemeine Lösung. Dies ist offenbar eine Geradenschar.

Aber aus $x + f'(y') \equiv 0$ kann man häufig eine weitere, singuläre Lösung erhalten.

Beispiel 11.37 $y = xy' - \frac{3}{2}(y')^{\frac{2}{3}}$, Diff.: $y' = y' + y'' \cdot (x - (y')^{-\frac{1}{3}})$

$$\Rightarrow y'' \cdot \left(x - \left(\frac{1}{y'}\right)^{\frac{1}{3}} \right) \equiv 0;\ y'' \equiv 0$$

$$\Rightarrow y = ax + b,\ y' = a \Longrightarrow y = ax - \frac{3}{2}\, a^{\frac{2}{3}} \quad \text{allg. Lösung.}$$

$$x - \left(\frac{1}{y'}\right)^{\frac{1}{3}} \equiv 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{x^3},\ y = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c$$

in Dgl. eingesetzt:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$$

ist eine weitere, singuläre Lösung, sie ist die Hüllkurve der Geradenschar $y = ax - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}$.

□

11.3 Dgl.n 2. Ordnung, welche sich auf Dgl.n 1. Ordnung zurückführen lassen

11.3.1 Dgl.n der Form $F(x, y', y'') = 0$

Da in diesem Differentialgleichungstyp y nicht vorkommt, substituiert man

$$u = y' \Rightarrow y'' = u',$$

und damit geht die Dgl. 2. Ordnung $F(x, y', y'') = 0$ in die Dgl. 1. Ordnung $F(x, u, u')$ über.

Beispiel 11.38 Man löse das AWP $y'' + \frac{1}{x}y' = x^2,\ y(1) = 0,\ y'(1) = \frac{1}{4}$. Die Dgl. enthält y nicht. Subst. $u = y',\ y'' = u' \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = x^2$ (lineare Dgl. 1. Ordnung).

Lösungsformel:

$$\begin{aligned} y' &= u = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left[\int x^2 e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx + c\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\int x^3\,dx + c\right] \\ &= \frac{1}{4}x^3 + \frac{c}{x}. \end{aligned}$$

Wegen $y'(1) = \frac{1}{4} + c = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 0$. $y' = \frac{1}{4}x^3 \Rightarrow y = \frac{1}{16}x^4 + c_1,\ y(0) = c_1 = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{16}x^4.$$

□

11.3.2 Dgl.n der Form $F(y, y', y'') = 0$

Da hier die Variable x nicht direkt enthalten ist, wird durch

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{11.18}$$

eine funktionale Abhängigkeit der Funktionen y', y'' von y gegeben. Daher liegt es nahe,

$$y' = u = u(y)$$

zu substituieren. Dann erhält man

$$y'' = \frac{d}{dx}u(y) = u'(y)y' = u'u,$$

und damit geht die Dgl. (11.18) in die Dgl. 1. Ordnung

$$F(y, u, u'u) = 0$$

über.

Beispiel 11.39 $yy'' - (y')^2 - 1 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Dgl. enthält x nicht. Subst.

$$
\begin{aligned}
y' = u(y) = u \quad &\Rightarrow \quad y'' = u'u \\
&\Rightarrow \quad yu'u - u^2 - 1 = 0 \quad \text{(trennbare Dgl. 1. Ordnung in } u(y)) \\
&\Rightarrow \quad yu\,\frac{du}{dy} = u^2 + 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int \frac{dy}{y} \\
&\Rightarrow \quad \ln(u^2+1) = \ln y^2 + c_1 \\
&\Rightarrow \quad u^2 + 1 = c_2 y^2 \quad (c_2 = e^{c_1} > 0).
\end{aligned}
$$

Wegen $u(y(0)) = y'(0) = 0$ und $y(0) = 1 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
c_2 = 1 \quad &\stackrel{u=y'}{\Longrightarrow} \quad (y')^2 + 1 = y^2 \\
&\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{y^2 - 1} \quad (y \not\equiv \pm 1) \\
&\Rightarrow \quad \pm\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int dx \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{arcosh} y = x + c_3 \\
&\Rightarrow \quad y = \cosh(x + c_3).
\end{aligned}
$$

$y(0) = \cosh c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 0$

$$\Rightarrow y = \cosh x.$$

□

11.3.3 Homogene Dgl.n 2. Ordnung

Definition 11.40 *Die Funktion*

$$F(x, y, y', y'')$$

wird homogen zum Grad α in y, y', y'' *genannt, wenn*

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^\alpha F(x, y, y', y'')$$

gilt.

Ist nun $F(x, y, y', y'')$ homogen zum Grad α, so erhält man mit $\lambda = \frac{1}{y}$:

$$F\left(x, \frac{1}{y}y, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = \frac{1}{y^\alpha}F(x, y, y', y''),$$

so daß gilt:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \iff F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0.$$

Substituiert man $u = u(x) = \frac{y'}{y}$, dann ist

$$u' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{y''}{y} - u^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = u' + u^2.$$

Damit geht die Dgl. $F(x, y, y', y'') = 0$ in die Dgl. 1. Ordnung

$$F(x, 1, u, u' + u^2) = 0$$

über.

Beispiel 11.41 $y''y'y - (y')^3 - (1 + x)y^3 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$. Die Funktion

$$F(x, y, y', y'') = y''y'y - (y')^3 - (1 + x)y^3$$

ist offenbar homogen zum Grad 3 in y, y', y''. Dividiert man die Dgl. durch y^3, so erhält man

$$\frac{y''}{y}\frac{y'}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^3 = 1 + x.$$

Substitution

$$\begin{aligned}
u = \frac{y'}{y} \quad &\Rightarrow \quad \frac{y''}{y} = u' + u^2 \\
&\Rightarrow \quad (u' + u^2)u - u^3 = x + 1 \\
&\Rightarrow \quad uu' = x + 1 \quad \text{(trennbare Dgl.)} \\
&\Rightarrow \quad \int u\, du = \int (x + 1)\, dx \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}x^2 + x + c_1.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} u(0) = \frac{y'(0)}{y(0)} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = c_1 \\ &\Rightarrow \quad u^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ &\Rightarrow \quad u = \pm(x+1), \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} u(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad u = x+1, \; u = \frac{y'}{y} \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = x+1 \\ &\overset{y\not\equiv 0}{\Rightarrow} \quad \int \frac{dy}{y} = \int (x+1)\,dx \\ &\Rightarrow \quad y = c_2 e^{\frac{1}{2}x^2+x}, \end{aligned}$$

$y(0) = c_2 = 2$

$$\Rightarrow y = 2e^{\frac{1}{2}x^2+x}.$$

□

Beispiel 11.42 Die homogene lineare Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Offensichtlich ist $F(x, y, y', y'') = y'' + a(x)y' + b(x)y$ homogen zum Grad 1 in y, y', y''. Division durch y:

$$\frac{y''}{y} + a(x)\frac{y'}{y} + b(x) = 0.$$

Subst. $u = \frac{y'}{y}$, $\frac{y''}{y} = u^2 + u' \Rightarrow u' + u^2 + a(x)u + b(x) = 0$, Riccati-Dgl. □

11.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition 11.43 *Die Differentialgleichung*

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y = c(x), \quad b_n(x) \not\equiv 0,$$

wird lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung *genannt. Man nennt sie* homogen, *wenn* $c(x) \equiv 0$ *ist und* inhomogen, *wenn* $c(x) \not\equiv 0$ *ist.*

Dividiert man durch $b_n(x)$, *so gelangt man zur* normierten linearen Dgl. n-ter Ordnung

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x).$$

11.4.1 Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Zur Behandlung der linearen Dgl. benötigt man den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Funktionen.

Definition 11.44 *Die Funktionen* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ *werden* auf dem Intervall (a, b) linear unabhängig *genannt, wenn aus*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_my_m(x) \equiv 0 \quad \textit{auf } (a, b)$$

folgt, daß die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ *alle gleich Null sind.*

$y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *sind* auf (a, b) linear abhängig, *wenn sie nicht linear unabhängig sind, also wenn* $c_1, \ldots c_m \in \mathbb{R}$ *existieren mit* $(c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0)$ *und*

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu y_\nu(x) \equiv 0 \quad \textit{auf } (a, b).$$

Beispiel 11.45 Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Zahlen (also $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$), dann sind die Funktionen

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \; y_m = e^{\lambda_m x}$$

auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Nachweis durch Induktion:

Für $m = 1$ folgt aus $c_1e^{\lambda_1 x} \equiv 0$ sofort $c_1 = 0$.

Es sei nun für ein $n \geq 1$ gezeigt, daß $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ linear unabhängig sind, und

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Multiplikation mit $e^{-\lambda_{k+1} x}$ ergibt dann

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{(\lambda_k - \lambda_{k+1})x} + c_{n+1} \equiv 0,$$

differenzieren nach $x \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} e^{(\lambda_k - \lambda_{k+1})x} \equiv 0.$$

Da nach Voraussetzung auch $\lambda_k - \lambda_{n+1}$ paarweise verschieden $\Rightarrow c_1, \ldots c_n = 0 \Rightarrow c_{n+1} = 0$. □

Beispiel 11.46 Die Funktionen $y_1 = x^3, \; y_2 = |x|^3$ sind auf $[0,1]$ linear abhängig (hier ist $y_1 \equiv y_2$), aber auf $[-1,1]$ linear unabhängig, denn aus

$$\left.\begin{array}{llll} c_1 y_1(1) & + c_2 y_2(1) & = 0 & \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 y_1(-1) & + c_2 y_2(-1) & = 0 & \Rightarrow -c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

□

Sind $y_1, \ldots, y_m$ mindestens $m-1$-mal stetig diffbar auf $[a,b]$, so ergibt $m-1$-maliges Differenzieren

$$\begin{array}{llll} c_1 y_1(x) & + c_2 y_2(x) & + \ldots + c_m y_m(x) & \equiv 0 \\ c_1 y_1'(x) & + c_2 y_2'(x) & + \ldots + c_m y_m'(x) & \equiv 0 \\ \vdots & & & \\ c_1 y_1^{(m-1)}(x) & + c_2 y_2^{(m-1)}(x) & + \ldots + c_m y_m^{(m-1)}(x) & \equiv 0, \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem in $c_1, \ldots, c_m$ mit der *Wronski-Matrix*

$$\mathcal{W}(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

als Koeffizientenmatrix.

Dieses Gleichungssystem besitzt nur eine triviale Lösung, wenn mindestens ein $x \in [a,b]$ existiert, für welches die *Wronski-Determinante*

$$W(x) = |\mathcal{W}(x)| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

ungleich Null ist.

Damit gilt

Satz 11.47 *Ist die Wronski-Determinante $W(x) \not\equiv 0$ auf $[a,b]$, so sind $y_1, \dots, y_m$ auf $[a,b]$ linear unabhängig.*

Übrigens folgt aus $W(x) \equiv 0$ auf $[a,b]$ i. a. noch nicht, daß $y_1, \dots, y_m$ auf $[a,b]$ linear abhängig sind. Zwar besitzt das homogene Gleichungssystem dann für jedes feste $x_0 \in [a,b]$ eine nichttriviale Lösung $c_1, \dots, c_m$, die aber für verschiedene x verschieden sein können!

Beispiel 11.48 Für $y_1 = x^3,\ y_2 = |x^3|$ ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & |x|^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \operatorname{sgn} x \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow W(x) = 3x^2[x^3 \operatorname{sgn} x - |x|^3] \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$, obwohl $x^3, |x|^3$ auf $[-1,1]$ linear unabhängig sind. □

11.4.2 Die homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung

Für die homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Satz 11.49 *Sind in der normierten linearen Dgl. n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{11.19}$$

die Funktionen $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ auf (a,b) stetig, so besitzt die Dgl. auf (a,b) n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Jede Lösung von (11.19) läßt sich durch

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

darstellen und jede derartige Linearkombination ist Lösung von (11.19).

Sind $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ vorgegebene reelle Zahlen und ist $x_0 \in (a, b)$, so existiert genau eine Lösung $y(x)$ von (11.19) mit

$$y(x_0) = p_0,\ y'(x_0) = p_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = p_{n-1}.$$

Definition 11.50 *Sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängige Lösungen der Dgl. (11.19), so nennt man sie ein* Fundamentalsystem *und*

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

ist dann die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. (11.19).

Satz 11.51 *Sind $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen von (11.19), so gilt für deren Wronski-Determinante*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

die Formel von Liouville*:*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt}, \quad x_0 \in (a, b) \text{ bel.}$$

Daraus folgt, daß es für die Wronskideterminante der Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ nur die Alternativen

$$\begin{array}{lcl} W(x) \equiv 0 \text{ auf } (a,b) & \iff & y_1, \ldots, y_n \text{ linear abhängig, oder} \\ W(x) \neq 0 \text{ auf } (a,b) & \iff & y_1, \ldots, y_n \text{ Fundamentalsystem} \end{array}$$

gibt.

11.4.3 Die inhomogene lineare Dgl. n-ter Ordnung

Gegeben sei die inhomogene normierte lin. Dgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x), \tag{11.20}$$

und

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{11.21}$$

sei die zu (11.20) gehörende homogene Dgl., dann gilt auch hier

Satz 11.52 (Superpositionsprinzip) *Ist y_h die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. (11.21), y_A die allgemeine und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. (11.20), so gilt*

$$y_A = y_h + y_p.$$

Hat man also die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. (11.21) schon gefunden,

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem, so macht man zur Lösung der inhomogenen Dgl. (11.20) den Ansatz:

Variation der Konstanten:

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n.$$

Dann erhält man $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll}
c_1'y_1 & + c_2'y_2 & + \ldots + c_n'y_n & = 0 \\
c_1'y_1' & + c_2'y_2' & + \ldots + c_n'y_n' & = 0 \\
\vdots & & & \\
c_1'y_1^{(n-2)} & + c_2'y_2^{(n-2)} & + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)} & = 0 \\
c_1'y_1^{(n-1)} & + c_2'y_2^{(n-1)} & + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} & = s(x),
\end{array}$$

dessen Koeffizientenmatrix die Wronski-Matrix ist, deren Determinante nirgends (wenn $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ stetig) gleich Null ist.

Anwendung der Cramerschen Regel ergibt dann:

$$c_k'(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

wobei $W(x)$ die Wronski-Determinante ist und $W_k(x)$ aus der Wronski-Determinante entsteht, indem man die k-te Spalte durch $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(x) \end{pmatrix}$ ersetzt.

Integration liefert

$$c_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)}\, dx.$$

Damit erhält man

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x).$$

Beispiel 11.53 $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1,\ x \neq 1.$
Die zugehörige homogene Dgl.

$$y'' - \frac{x}{x-1}\, y' + \frac{1}{x-1}\, y = 0$$

besitzt (wie man durch Einsetzen erkennt) die Lösungen $y_1 = x$ und $y_2 = e^x$.
Deren Wronski-Determinante ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x \neq 0 \quad \text{für } x \neq 1$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ Fundamentalsystem, $y_h = c_1 x + c_2 e^x$.
Ansatz zur Lösung der inhomogenen Dgl.

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = c_1(x) x + c_2(x) e^x \Rightarrow$$

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{e^{-x}}{x-1} \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ x-1 & e^x \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x,$$

$$c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{e^{-x}}{x-1}\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = xe^{-x} \Rightarrow c_2(x) = \int xe^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

$$\Rightarrow y_p = -x \cdot x - (x+1)e^{-x} \cdot e^x = -x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow y_A = y_h + y_p = c_1 x + c_2 e^x - x^2 - x - 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. □

Hat man also die homogene lineare Dgl. gelöst, so erhält man (zumindest theoretisch) durch die Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

Die Lösung der homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung ist i. a. sehr problematisch und man kennt nur für bestimmte Spezialfälle Lösungsmethoden, die zu einer vollständigen Lösung führen. So für lineare Dgl.n mit konstanten Koeffizienten und für die Eulersche Dgl., die im folgenden behandelt werden.

11.4.4 Lineare Dgl.n n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sind in der Dgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = s(x) \tag{11.22}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ Konstanten, so löst man die homogene Dgl.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit Hilfe des Ansatzes

$$y = e^{\lambda x}.$$

Dann ist

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots,\ y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}.$$

Setzt man dies in die homogene Dgl. ein, so folgt

$$\left[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right] e^{\lambda x} = 0,$$

und da $e^{\lambda x} \neq 0$ ist, folgt die *charakteristische Gleichung*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Man nennt $P(\lambda)$ das *charakteristische Polynom* der homogenen Dgl.

$y = e^{\lambda_0 x}$ ist damit genau dann eine Lösung der Dgl., wenn λ_0 Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Nun ist $P(\lambda)$ ein Polynom vom Grad n und besitzt daher in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sind diese Nullstellen alle reell und paarweise verschieden, so sind (siehe 11.4.1 Bsp. 11.45)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

n linear unabhängige Lösungen, bilden also ein Fundamentalsystem:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

ist dann die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Ist nun z. B. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ eine einfache komplexe Nullstelle von $P(\lambda)$, so auch $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ (da $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$), und man erhält damit die komplexen Lösungen

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x], \\ Y_2 &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos\beta x - i\sin\beta x]. \end{aligned}$$

Mit $y_1 = \frac{1}{2}[Y_1 + Y_2]$ und $y_2 = \frac{1}{2i}[Y_1 - Y_2]$ gelangt man zu den reellen Lösungen

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ist λ_1 eine j-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so gilt

$$P(\lambda_1) = 0,\ P'(\lambda_1) = 0, \ldots,\ P^{(j-1)}(\lambda_1) = 0,$$

und damit gilt wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda} L(e^{\lambda x}) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(e^{\lambda x})^{(n)} + a_{n-1}(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \ldots + a_1(e^{\lambda x})' + a_0 e^{\lambda x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{\lambda x}P(\lambda)) \\ &= xe^{\lambda x}P(\lambda) + e^{\lambda x}P'(\lambda), \end{aligned}$$

und da man nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Differentiation vertauschen kann

$$\begin{aligned} L(xe^{\lambda x}) &= (xe^{\lambda x})^{(n)} + a_{n-1}(xe^{\lambda x})^{(n-1)} + \ldots + a_1(xe^{\lambda x})' + a_0 xe^{\lambda x} \\ &= xe^{\lambda x}P(\lambda) + e^{\lambda x}P'(\lambda). \end{aligned}$$

Wegen $P(\lambda_1) = 0$ und $P'(\lambda_1) = 0$ folgt dann

$$L(xe^{\lambda_1 x}) = 0,$$

d. h. $y = xe^{\lambda_1 x}$ ist ebenfalls (neben $y = e^{\lambda_1 x}$) eine Lösung der Dgl.

Setzt man dieses Verfahren fort, d. h. differenziert man wieder nach λ, so folgt, daß (da erst $P^{(j)}(\lambda_1) \neq 0$ ist)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ y_j = x^{j-1}e^{\lambda_1 x}$$

zur j-fachen Nullstelle λ_1 gehörige Lösungen sind. Dies gilt sowohl für reelle als auch für komplexe λ_1.

Damit erhält man genau n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$, und diese sind linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.

Zusammengefaßt folgt

Satz 11.54 *Die homogene Dgl.*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

löst man durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ und erhält die charakteristische Gleichung

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Eine einfache reelle Nullstelle λ_1 ergibt die Lösung $y = e^{\lambda_1 x}$.

Für ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_2 = \alpha + i\beta,\ \bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$ erhält man die Lösungen

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Zu einer j-fachen reellen Nullstelle λ_3 $(j \geq 2)$ erhält man die Lösungen

$$y_1 = e^{\lambda_3 x},\ y_2 = xe^{\lambda_3 x}, \ldots,\ y_j = x^{j-1}e^{\lambda_3 x}.$$

Ist $\lambda_4 = \gamma + i\vartheta$ eine k-fache komplexe Nullstelle, so auch $\bar{\lambda}_4 = \gamma - i\vartheta$. Hierzu gehören die Lösungen

$$y = e^{\gamma x}\cos\vartheta x,\ y = xe^{\gamma x}\cos\vartheta x, \ldots,\ y = x^{k-1}e^{\gamma x}\cos\vartheta x,$$

$$y = e^{\gamma x}\sin\vartheta x,\ y = xe^{\gamma x}\sin\vartheta x, \ldots,\ y = x^{k-1}e^{\gamma x}\sin\vartheta x.$$

Insgesamt erhält man damit ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ und die allgemeine Lösung ist

$$y_h = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 11.55

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$$

Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Glg.

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Nullstellen $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}.$$

□

Beispiel 11.56

$$2y''' + 3y'' + 18y' - 10y = 0.$$

Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Glg.

$$2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 18\lambda - 10 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_{2,3} = -1 \pm 3i$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-x}\cos 3x + c_3 e^{-x}\sin 3x.$$

□

Beispiel 11.57

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Glg.

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$$

$\Rightarrow$ dreifache Nullstelle $\lambda_{1,2,3} = -2$.

$$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-2x}.$$

□

11.4.5 Ansatzmethode zur Lösung der inhomogenen Dgl.

Generell kann man die inhomogene Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (11.22) durch Variation der Konstanten (siehe 11.4.3) lösen. Jedoch ist diese Methode i. a. relativ aufwendig.

Ist die Störfunktion von der Form

$$s(x) = P(x)e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

$P(x)$ ein Polynom vom Grad $m \geq 0$, $a, A, B \in \mathbb{R}$, dann ist es günstiger, eine partikuläre Lösung durch einen Lösungsansatz zu bestimmen.

Man macht dann den Ansatz:

I $y_p = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)]$, wobei $P_1(x), P_2(x)$ Polynome mit unbestimmten Koeffizienten sind und grad P_1 = grad P_2 = grad P, wenn $a + i\beta$ **keine** Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist.

II Ist $\alpha + i\beta$ eine j-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung, dann wird die obige Ansatzfunktion noch mit x^j multipliziert *(Resonanzfall):*

$$y_p = x^j e^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)].$$

Man setzt die Ansatzfunktion in die inhomogene Dgl. ein und bestimmt dann durch Koeffizientenvergleich die unbestimmt angesetzten Koeffizienten der Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$.

Beispiel 11.58 Allgemeine Lösung von

$$y''' + 3y'' + y' - 5y = e^{-x}.$$

1. Lösung der homogenen Dgl. $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$ durch den Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Glg. $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$. Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm i$.

   $$\Rightarrow y_h = c_1 e^x + e^{-2x}[c_2 \cos x + c_3 \sin x].$$

2. Bestimmung einer partikulären Lösung y_p durch den Ansatz

   $$s(x) = \underbrace{1}_{P(x)} \cdot e^{-1 \cdot x}.$$

   Vergleich mit der allgemeinen Störfkt. $s(x) = P(x)e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$: $P(x) \equiv 1,\ \alpha = -1,\ \beta = 0,\ A = 1$. Da $\alpha + i\beta = -1$ keine Nullstelle der char. Glg.: Ansatz $y_p = ae^{-x} \Rightarrow y_p' = -ae^{-x},\ y_p'' = ae^{-x},\ y_p''' = -ae^{-x}$ in Dgl. eingesetzt ergibt

   $$ae^{-x}[-1 + 3 - 1 - 5] = e^{-x} \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{4}e^{-x}.$$

   $\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

   $$y_A = y_h + y_p = c_1 e^x + e^{-2x}[c_2 \cos x + c_3 \sin x] - \frac{1}{4}e^{-x}.$$

□

Beispiel 11.59

$$y''' - 3y'' + 4y = xe^{-x}.$$

1. Hom. Dgl.: $y''' - 3y'' + 4y = 0$, Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Glg. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 2$

   $$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{2x}.$$

2. Inhom. Dgl.: $s(x) = xe^{-x}$, da -1 einfache Nullstelle der char. Glg. Resonanz. $P(x) = x$ Pol 1. Grades. $\Rightarrow$ Ansatz

$$\begin{aligned} y_p &= x^1(ax+b)e^{-x} = (ax^2+bx)e^{-x} \\ \Rightarrow y_p' &= e^{-x}[-ax^2+(2a-b)x+b], \\ y_p'' &= e^{-x}[ax^2+(b-4a)x+2a-2b], \\ y_p''' &= e^{-x}[-ax^2+(6a-b)x+3b-6a] \end{aligned}$$

in Dgl. eingesetzt:

$$\begin{aligned} &e^{-x}[-ax^2+(6a-b)x+3b-6a-3ax^2-3(b-4a)x \\ &\quad -6a+6b+4ax^2+4bx] = xe^{-x}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow 18ax + 6b - 12a = x \Rightarrow 18a = 1 \wedge 6b - 12a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{18},\ b = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{18}(x^2+2x)e^{-x}$$

$$\Rightarrow y_A = y_h + y_p = \left[c_1 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{9}x\right] e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{2x}.$$

□

Beispiel 11.60

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

1. Homogene Dgl.: $y'' + y = 0$, Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$ Fundamentalsystem,

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

2. Inhomogene Dgl.: $s(x) = \frac{1}{\cos x}$ Ansatz-Methode nicht möglich, also Variation der Konstanten. (Die Dgl. ist schon normiert!) Ansatz: $y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$. Wronski-Determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ s(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad c_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|. \\
c_2'(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow c_2(x) = x \\
&\Rightarrow \quad y_p = (\ln|\cos x|)\cos x + x \sin x \\
&\Rightarrow \quad y_A = y_h + y_p = (c_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (c_2 + x)\sin x.
\end{aligned}$$

□

Satz 11.61 *Besteht in der inhomogenen Dgl. die Störfunktion aus einer Summe von Störfunktionen und ist für jeden einzelnen Summanden ein Ansatz zur Erlangung einer partikulären Lösung der Dgl. möglich, so kann man die Summe der Partikularansätze als Ansatz für die inhomogene Dgl. nehmen. D. h.*

Ist $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$ und gehört zu $s_1(x)$ der Ansatz y_{p_1} und zu $s_2(x)$ der Ansatz y_{p_2}, so nimmt man für die inhomogene Dgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = s(x) = s_1(x) + s_2(x)$$

den Ansatz

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Beispiel 11.62

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = \underbrace{x}_{s_1(x)} + \underbrace{e^{-2x}}_{s_2(x)}.$$

1. Homogene Dgl.: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0,\ y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x}.$$

2. Die Störfunktion ist Summe der Störfunktionen $s_1(x) = x$ und $s_2(x) = e^{-2x}$.

   Zu $s_1(x) = x$ gehört die Ansatzfunktion $y_{p_1} = ax + b$, zu $s_2(x) = e^{-2x}$ gehört der Ansatz $y_{p_2} = ce^{-2x} \Rightarrow$ Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_p &= y_{p_1} + y_{p_2} = ax + b + ce^{-2x} \\
&\Rightarrow \quad y_p' = a - 2ce^{-2x},\ y_p'' = 4ce^{-2x},\ y_p''' = -8ce^{-2x} \\
&\Rightarrow \quad y_p''' + 3y_p'' - y_p' + 3y_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -8ce^{-2x} + 12ce^{-2x} - a + 2ce^{-2x} + 3ax + 3b + 3ce^{-2x} \\
&= x + e^{-2x} \\
\Rightarrow\;\; & 6ce^{-2x} + 3ax + 3b - a = e^{-2x} + x \\
\Rightarrow\;\; & 6c = 1,\; 3a = 1,\; 3b - a = 0 \\
\Rightarrow\;\; & c = \frac{1}{6},\; a = \frac{1}{3},\; b = \frac{1}{9} \\
\Rightarrow\;\; & y_p = \frac{1}{6}\,e^{-2x} + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{9} \\
\Rightarrow\;\; & y_A = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

□

11.4.6 Eulersche Dgl.n

Definition 11.63 *Eine lineare Dgl. der Form*

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = f(x) \tag{11.23}$$

wird EULERsche Differentialgleichung *genannt.*

Durch die Substitution $x = e^t$ wird die Eulersche Dgl. für $x > 0$ in eine lineare Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt.

Dazu zeigt man induktiv, daß mit $x = e^t$ gilt

$$x^k y^{(k)}(x) = e^{kt}y^{(k)}(e^t) = u^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j)}(t) \quad \text{mit } a_{kj} \in \mathbb{R},\; k \in \mathbb{N}.$$

Für $k = 1$ erhält man aus $y(x) = y(e^t) = u(t)$:

$$u'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x).$$

Sei nun für ein $k \geq 1$

$$x^k y^{(k)}(x) = e^{kt}y^{(k)}(e^t) = u^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j)}(t).$$

Differentiation nach t ergibt dann

$$ke^{kt}y^{(k)}(e^t) + e^{(k+1)t}y^{(k+1)}(e^t) = u^{(k+1)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j+1)}(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
x^{k+1}y^{(k+1)}(x) &= e^{(k+1)t}y^{(k+1)}(e^t) \\
&= u^{(k+1)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j+1)}(t) - ke^{kt}y^{(k)}(t) \\
&= u^{(k+1)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j+1)}(t) - ku^{(k)}(t) - k\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(j)}(t) \\
&= u^{(k+1)}(t) + a_{k,k-1}u^{(k)}(t) + \sum_{j=2}^{k-1}(a_{k,j-1} - ka_{kj})u^{(j)}(t) - ka_{j1}u'(t) \\
&= u^{(k+1)}(t) + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}u^{(j)}(t).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$x^ky^{(k)} = u^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}u^{(k)}(t)$$

in die Euler-Dgl. ein, so erhält man die lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + b_1u' + b_0u = s(t), \quad \text{mit } s(t) = f(e^t). \tag{11.24}$$

Diese wird dann natürlich durch die Rücksubstitution $t = \ln x$ wieder in die Euler-Dgl. zurückgeführt.

Prinzipiell kann man also die Euler-Dgl. lösen, indem man sie in eine lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten transformiert, diese löst und dann rücksubstituiert. Allerdings ist dieses Verfahren (wie man schon aus der Herleitung sieht) zu aufwendig.

Einfacher ist es, die Lösungsansätze für die lineare Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten direkt durch die Substitution $t = \ln x$ (für $x > 0$) auf die Euler-Dgl. zu übertragen.

Ist $u = e^{\lambda t}$ der Ansatz zur Lösung der zur (11.24) gehörigen homogenen Dgl., so erhält man durch $y = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$ $(x > 0)$ den entsprechenden Ansatz für die zu (11.23) gehörige homogene Euler-Dgl. und erhält

Satz 11.64 *Zur Lösung der homogenen Euler-Dgl.*

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

wird $y = x^\lambda$ $(x > 0)$ *angesetzt. Dann ist* $xy' = \lambda x^\lambda$ *und allgemein*

$$x^k y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)x^\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dies in die Dgl. eingesetzt ergibt die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) \\ &\quad + \ldots + \lambda a_1 + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Ist λ_1 *eine* j*-fache Nullstelle der char. Glg., dann gehören dazu die Lösungen*

$$y_1 = x^{\lambda_1},\ y_2 = x^{\lambda_1} \ln x, \ldots,\ y_j = x^{\lambda_1} (\ln x)^{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Ist $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ *eine* l*-fache komplexe Nullstelle, so auch* $\bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$ *und man erhält dafür die Lösungen*

$$y = x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ y = \ln x\, x^\alpha \cos(\beta \ln x), \ldots,\ y = (\ln x)^{j-1} x^\alpha \cos(\beta \ln x),$$

$$y = x^\alpha \sin(\beta \ln x),\ y = \ln x\, x^\alpha \sin(\beta \ln x), \ldots,\ y = (\ln x)^{j-1} x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

Insgesamt erhält man damit n *linear unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem* $y_1, \ldots, y_n$*, und die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. ist dann*

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 11.65 1. Allgemeine Lösung von $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$. Ansatz: $y = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1},\ y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2},\ y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$. In Dgl. eingesetzt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^\lambda + 2\lambda(\lambda-1)x^\lambda - 4\lambda x^\lambda + 4x^\lambda = 0 \quad \mid \cdot x^{-\lambda} \\ &\Rightarrow\ \text{char. Glg.: } \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\Rightarrow\ \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\Rightarrow\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2 \\ &\Rightarrow\ y_1 = x^1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^{-2} \quad \text{linear unabh. Lösungen} \\ &\Rightarrow\ y_h = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-2}. \end{aligned}$$

2. $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$, Ansatz $y = x^\lambda \Rightarrow$ char. Glg. $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 6\lambda(\lambda-1) + 7\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = -1$ (dreifache reelle Nullstelle)

$$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x)x^{-1}.$$

3. $x^3y''' + 6x^2y'' + 11xy' + 5y = 0$, Ansatz $y = x^\lambda \Rightarrow$ char. Glg. $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 6\lambda(\lambda-1) + 11\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$

$$\Rightarrow y_h = x^{-1}[c_1 + c_2\cos(2\ln x) + c_3\sin(2\ln x)].$$

□

Bisher wurde nur der Fall $x > 0$ behandelt. Für $x < 0$ substituiert man in der Euler-Dgl. $|x| = -x = e^t$ bzw. $t = \ln|x|$, und erhält, wegen $u(t) = y(-e^t)$:

$$u'(t) = -e^t y'(-e^t) = xy')(x),$$

$$u''(t) = -e^t y'(-e^t) + (-e^t)^2 y''(-e^t) = xy' + x^2y'' \quad \text{usw.}$$

die gleiche lin. Dgl. mit konstanten Koeffizienten wie für $x > 0$.

Also kann man die Euler-Dgl. zunächst für $x > 0$ lösen und (falls die Lösung auch für $x < 0$ interessiert) dann in der Lösung x durch $|x|$ ersetzen (in den Teilen, die den ln oder nichtganzzahlige Potenzen von x enthalten).

So ist die Lösung zu Beispiel 3:

$$y_h = x^{-1}[c_1 + c_2\cos(2\ln|x|) + c_3\sin(2\ln|x|)], \quad x \neq 0.$$

Die inhomogene Euler-Dgl. (11.23) kann man wieder mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten lösen. Allerdings muß man dabei auf die Normierung achten!

$$y^{(n)} + a_{n-1}x^{-1}y^{(n-1)} + \ldots + x^{-n+1}y' + a_0x^{-n}y = x^{-n}f(x)!$$

Aber auch die Ansatzmethode (bei spezieller Störfunktion) überträgt sich durch die Substitution $t = \ln|x|$ direkt. Aus den Ansätzen für y_p für lineare Dgl.n mit konstanten Koeffizienten erhält man damit für die inhomogene Euler-Dgl.:

Satz 11.66 *Ist die Störfunktion der Euler-Dgl. (11.23) von der Form*

$$f(x) = P(\ln x)x^\alpha[A\cos(\beta\ln x) + B\sin(\beta\ln x)],$$

$P(\ln x)$ *ein Polynom von* $\ln x$, $\alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$, *so macht man, wenn* $\alpha + i\beta$ **keine** *Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist, den Ansatz*

$$y_p = x^\alpha[P_1(\ln x)\cos(\beta\ln x) + P_2(\ln x)\sin(\beta\ln x)],$$

$P_1(\ln x), P_2(\ln x)$ *Polynome in* $\ln x$ *mit unbestimmten Koeffizienten und* grad P_1 = grad P_2 = grad P.

Ist allerdings $\alpha + i\beta$ *eine* j*-fache Nullstelle der char. Glg. (Resonanzfall), dann wird der obige Ansatz noch mit* $(\ln x)^j$ *multipliziert:*

$$y_p = x^\alpha[P_1(\ln x)\cos(\beta\ln x) + P_2(\ln x)\sin(\beta\ln x)]\ln^j x.$$

Hierbei muß die Normierung

$$\mathbf{x^n y^{(n)}} + \dots$$

beachtet werden!

Beispiel 11.67 1. $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = x^3$. Es ist (siehe Bsp. 11.65.1) $y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-2}$. Lösungsansatz für die inhomogene Dgl. $f(x) = x^3$ ($P(\ln x) = 1,\ \alpha = 3,\ \beta = 0$, keine Resonanz, da 3 keine Nullstelle der char. Glg.)

$$\begin{aligned} y_p = ax^3 \quad &\Rightarrow \quad y_p' = 3ax^2,\ y_p'' = 6ax,\ y_p''' = 6a \\ &\Rightarrow \quad 6ax^3 + 2x^2 6ax - 4x\cdot 3ax^2 + 4ax^3 = x^3 \\ &\Rightarrow \quad a(6 + 12 - 12 + 4) = 1 \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{10} \\ &\Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{10}x^3, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_A = y_h + y_p = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-2} + \frac{1}{10}x^3.$$

2. $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = x^{-2}$. $y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-2}$. Ansatz für y_p (da nun $f(x) = x^{-2}$, $P(\ln x) = 1$, $\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\alpha + i\beta = -2$ eine einfache Nullstelle der char. Glg. ist, liegt Resonanz vor!) $y_p = ax^{-2}\ln x$, $y_p' = ax^{-3}[1-2\ln x]$, $y_p'' = ax^{-4}[6\ln x - 5]$, $y_p''' = ax^{-5}[26 - 24\ln x]$, in Dgl. eingesetzt:

$$\begin{aligned} & ax^{-2}[26 - 24\ln x + 12\ln x - 10 + 8\ln x - 4 + 4\ln x] = x^{-2} \\ & \Rightarrow \quad 12a = 1 \\ & \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{12}x^{-2}\ln x \end{aligned}$$

$$y_A = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-2} + \frac{1}{12}x^{-2}\ln x, \quad x > 0.$$

3. $x^2y'' + 2xy' - 6y = x^3e^x$

(a) Homogene Dgl.: $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$, Ansatz: $y = x^\lambda \Rightarrow \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$

$$\Rightarrow y_h = c_1x^2 + c_2x^{-3} = c_1y_1 + c_2y_2.$$

(b) Inhomogene Dgl.: Störfunktion für Ansatzmethode nicht geeignet, Variation der Konstanten:
Normierung: $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = xe^x = s(x)$, Ansatz

$$\begin{aligned} & y_p = c_1(x)x^2 + c_2(x)x^{-3},\ W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-3} \\ 2x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -5x^{-2} \\ & \Rightarrow \quad c_1'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ s(x) & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}x^2\begin{vmatrix} 0 & x^{-3} \\ xe^x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}e^x \\ & \Rightarrow \quad c_1(x) = \frac{1}{5}e^x \\ & c_2'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & s(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}x^2\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & xe^x \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}x^5e^x \\ & \Rightarrow \quad c_2(x) = -\int \frac{1}{5}x^5e^x\,dx \\ & \qquad = \left(-\frac{1}{5}x^5 + x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right)e^x \\ & \Rightarrow \quad y_p = c_1(x)x^2 + c_2(x)x^{-3} \\ & \qquad = (x - 4 + 12x^{-1} - 24x^{-2} + 24x^{-3})e^x. \end{aligned}$$

□

11.4.7 Reduktion der Ordnung

Hat man auf irgendeine Art eine Lösung y_1 der linearen Dgl. n-ter Ordnung

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x)$$

gefunden, so führt der Ansatz

$$y = y_1 \int^x u(t)\,dt = y_1 \int u\,dx$$

diese in eine lineare Dgl. $n-1$-ter Ordnung in u über.

Dies ist im Fall $n = 2$ besonders interessant, da man dann eine lineare Dgl. 1. Ordnung erhält.

Beispiel 11.68 $(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 0$. $y_1 = e^{-x}$ ist eine Lösung, wie man durch Einsetzen sofort erkennt. Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \int u\,dx = e^{-x} \int u\,dx \\ \Rightarrow \quad y' &= -e^{-x} \int u\,dx + ue^{-x} \\ \Rightarrow \quad y'' &= e^{-x} \int u\,dx - 2e^{-x}u + u'e^{-x} \end{aligned}$$

in die Dgl. eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} &(2x+1+2-2x-3)e^{-x} \int u\,dx + (2x+1)(u'e^{-x} - 2e^{-x}u) - 2ue^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow \quad (2x+1)u' - (4x+4)u = 0 \quad \text{homogene lin. Dgl. 1. Ordnung} \\ &\Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{4x+4}{2x+1} = 2 + \frac{2}{2x+1} \\ &\Rightarrow \quad u = (2x+1)e^{2x} \\ &\Rightarrow \quad y_2 = e^{-x} \int (2x+1)e^{2x}\,dx = e^{-x}xe^{2x} = xe^x \end{aligned}$$

ist eine weitere Lösung

$$\Rightarrow y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-x} + c_2xe^x,$$

da $y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^x$ lin. unabhängig. □

11.4.8 Anfangswert- und Randwertprobleme bei linearen Dgl.n

Satz 11.69 *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x), \\ &\quad y^{(k)}(x_0) = p_k, \quad k = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

besitzt, wenn $a_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ *und* $s(x)$ *stetig auf* $[a, b]$ *und* $x_0 \in [a, b]$ *ist, genau eine Lösung auf* $[a, b]$*, denn ist*

$$y_A = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + y_p$$

die allgemeine Lösung, so erhält man durch Einsetzen der Anfangswerte

$$y^{(k)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(x_0) + y_p^{(k)}(x_0) = p_k, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ *mit der Wronski-Matrix* $\mathcal{W}(x_0)$ *als Koeffizientenmatrix, und da* $W(x_0) = |\mathcal{W}(x_0)| \neq 0$ *ist, folgt die eindeutige Lösbarkeit.*

Beispiel 11.70 AWP: $y'' + y' - 6y = xe^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Bestimmen der allgemeinen Lsg.:

$$\begin{aligned} &y'' + y' - 6y = 0,\ y = e^{\lambda x} \\ &\quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3 \\ &\quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}. \\ &s(x) = xe^x,\ \text{Ansatz } y_p = (ax + b)e^x \\ &\quad \Rightarrow \quad e^x[ax + b + 2a + ax + b + a - 6ax - 6b] = xe^x \\ &\quad \Rightarrow \quad -4ax + 3a - 4b = x \\ &\quad \Rightarrow \quad y_p = -\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\right)e^x \\ &\quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{16}(4x + 3)e^x \\ &\quad \Rightarrow \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} - \frac{1}{16}(4x + 7)e^x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{16} = 1, \quad y'(0) = 2c_1 - 3c_2 - \frac{7}{16} = 0 \\
&\Rightarrow \quad c_2 = \frac{4}{5},\ c_2 = \frac{31}{80} \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{4}{5}e^{2x} + \frac{31}{80}e^{-3x} - \frac{1}{16}(4x+3)e^{x}.
\end{aligned}
$$

□

Neben dem Anfangswertproblem spielen in der Praxis aber auch *Randwertprobleme* eine Rolle.

Definition 11.71 *Wird von einer Lösung der Dgl.*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

gefordert, daß sie auf dem Intervall $[a, b]$ *die (linearen) Randbedingungen*

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_j y^{(j)}(a) = A, \quad \sum_{j=0}^{n-1} B_j y^{(j)}(b) = B$$

erfüllen soll, so spricht man vom Randwertproblem

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad \sum_{j=0}^{n-1} A_j y^{(j)}(a) = A, \quad \sum_{j=0}^{n-1} B_j y^{(j)}(b) = B.$$

Die Lösbarkeit und eindeutige Lösbarkeit eines Randwertproblems hängt (im Gegensatz zum AWP) nicht nur von der Dgl., sondern auch von den Randbedingungen ab.

Beispiel 11.72

$$y'' + k^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1, \quad (k > 0).$$

Allgemeine Lösung: $y = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$. Aus $y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin(kx) \Rightarrow y' = kc_2 \cos(kx)$, $y'(\pi) = c_2 k \cos(k\pi) = 1$ ist genau dann erfüllbar, wenn $\cos(kx) \neq 0$, also $k \neq \frac{1}{2} + j,\ j \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{1}{\cos(k\pi)} \sin(kx)$. Für $k = \frac{1}{2} + j$ existiert keine Lösung. □

Beispiel 11.73

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Allgemeine Lösung: $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + e^{-x}$, $\quad y(0) = c_1 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1$, und da die 2. Randbedingung $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ für beliebige c_2 erfüllt ist, erhält man die Lösungen

$$y = (c_2x - 1)e^{-2x} + e^{-x}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

11.5 Lösung von Dgl.n durch Reihenentwicklung

In der Praxis treten häufig Dgl.n auf, die man mit den bisher bekannten Methoden nicht geschlossen lösen kann.

Man wendet dann meist numerische Näherungsverfahren (auf die wir in dieser Vorlesung leider nicht eingehen können) an, aber diese liefern nur eine genäherte Wertetabelle zur Lösung eines AWPs.

Möchte man allerdings eine Näherungsfunktion zur gesuchten Lösung finden, so kann ein Reihenansatz nützlich sein.

Ausgangspunkt dazu ist der

Satz 11.74 *Gegeben ist das AWP*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = p_0,\ y'(x_0) = p_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = p_{n-1}.$$

Ist die Funktion f in einer Umgebung von $(x_0, p_0, \ldots, p_{n-1})$ nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ entwickelbar, dann besitzt das AWP genau eine Lösung y, welche bei x_0 in eine Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ entwickelbar ist.

Liegen die Voraussetzungen des Satzes vor, so bieten sich zur Bestimmung der Glieder a_k der Potenzreihe zwei naheliegende Methoden an:

1. Man setzt $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ unbestimmt an, setzt diese Reihe in die Dgl. ein und erhält sogenannte Rekursionsformeln für die unbekannten Koeffizienten, die man mit Hilfe der Anfangswerte (diese liefern wegen $a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$ die ersten n Koeffizienten der Reihe) und der Rekursionsformel nacheinander bestimmen kann. Diese Methode ist im wesentlichen für lineare Dgl.n zu empfehlen.

Beispiel 11.75 $y'' + 2xy' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (hier ist $x_0 = 0$). Reihenansatz:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$
$$\Rightarrow \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Wegen $y(0) = a_0 = 1,\ y'(0) = a_1 = 0$ liefern die Anfangswerte die ersten beiden Koeffizienten. Setzt man die Reihe in die Dgl. ein, so folgt

$$y'' + 2xy' + 2y = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k = 0$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+1)a_k]x^k \equiv 0,$$

woraus die Rekursionsformel

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+1)a_k = 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

folgt.

$$\Rightarrow a_{k+2} = -\frac{2}{k+2}\, a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wegen $a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0,\ a_5 = 0$, induktiv $a_{2j+1} = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots$

Wegen $a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{2}{2}\,1 = -1 \Rightarrow a_4 = -\frac{2}{4}\,a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_6 = \frac{-2}{4+2}\,a_4 = -\frac{1}{3!}$. Behauptung: $a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{j!}$. Nachweis per Induktion:

Für $j = 0$ ist $a_0 = (-1)^0 \frac{1}{0!} = 1$.

Sei $a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{j!}$ für ein $j \geq 0$.

$$\Rightarrow a_{2(j+1)} = a_{2j+2} = -\frac{2}{2j+2}\,a_{2j} = -\frac{1}{j+1}(-1)^j\frac{1}{j!} = (-1)^{j+1}\frac{1}{(j+1)!}.$$

$$\Rightarrow y = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,\frac{x^{2j}}{j!} = e^{-x^2}.$$

□

2. Man setzt

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,y^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

als Taylorreihe an.

Wegen $y^{(k)}(x_0) = p_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ sind die ersten n Koeffizienten schon durch die Anfangswerte gegeben, und es ist

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$$

direkt durch Einsetzen in die Dgl. zu berechnen. Nun differenziert man die Dgl.:

$$y^{(n+1)} = \frac{d}{dx}f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

setzt $x_0, y(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$ ein und erhält $y^{(n+1)}(x_0)$. Dieses Verfahren kann man (theoretisch) beliebig weit fortsetzen und erhält $y^{(n+2)}(x_0), y^{(n+3)}(x_0), \ldots$

Beispiel 11.76 $y' = x^2 + y^3,\ y(0) = 1$, Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}y^{(k)}(0)x^k$. Wegen

$$y'(0) = 0^2 + y(0)^3 = 1 \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$\Rightarrow y'' = 2x + 3y^2y' \quad (y(0) = 1,\ y'(0) = 1) \Rightarrow y''(0) = 3$$

$$y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y''y^2 \quad (y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3) \Rightarrow y'''(0) = 17$$

$$y^{(4)} = 6(y')^3 + 18yy'y'' + 3y'''y^2 \quad (y(0) = 1, \ldots, y'''(0) = 17)$$

$$\Rightarrow y^{(4)}(0) = 111$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3 + \frac{111}{24}x^4 + \ldots$$

□

Kapitel 12

Systeme linearer Differentialgleichungen

In Naturwissenschaft und Technik treten häufig Abläufe auf, die sich gegenseitig beeinflussen (z. B. Mehrfachpendel, gekoppelte Schwingungen). Dies führt zu mehreren Gleichungen von Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ und deren Ableitungen.

Definition 12.1 *Sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ durch*

$$\begin{aligned} y_1^{(m)} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) \\ &\vdots \\ y_n^{(m)} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) \end{aligned}$$

verknüpft, so spricht man von einem Differentialgleichungssystem m-ter Ordnung.

Satz 12.2 *Durch Einführung „zusätzlicher" Funktionen*

$$y_{n+1} = y_1',\ y_{n+2} = y_{n+1}' = y_1'', \ldots,\ y_{n+m-1} = y_{n+m-2}' = y_1^{(m-1)},$$

$$y_{n+m} = y_2',\ y_{n+m+1} = y_{n+m}' = y_2'', \ldots \text{ usw.}$$

kann jedes solcher Systeme in ein System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= g_1(x, x_1, \ldots, y_r) \\ y_2' &= g_2(x, x_1, \ldots, y_r) \\ &\vdots \\ y_r' &= g_r(x, x_1, \ldots, y_r) \end{aligned}$$

überführt werden.

Beispiel 12.3

$$\begin{aligned} y_1'' &= xy_1' + x^2y_2' + y_1y_2 \\ y_2'' &= y_1'y_2'y_2 - xy_1 \end{aligned}$$

Setzt man $y_3 = y_1'$ und $y_4 = y_2'$, so ist $y_3' = y_1''$, $y_4' = y_2''$ und man erhält das System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= xy_3 + x^2y_4 + y_1y_2 \\ y_4' &= y_3y_4y_2 - xy_1 \end{aligned}$$

□

Man kann sich daher im weiteren auf Systeme 1. Ordnung beschränken.

Natürlich ist die Lösung von Systemen von Dgl.n noch wesentlich problematischer als die Lösung der in den vorhergehenden Kapiteln behandelten gewöhnlichen Dgl.n, und da auch nur für Systeme linearer Dgl.n eine gewisse einheitliche Theorie existiert, die im Falle eines linearen Differentialgleichunssystems mit konstanten Koeffizienten zu einer vollständigen Lösung führt, werden auch nur diese im folgenden behandelt.

12.1 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Definition 12.4

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned}$$

wird lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung *genannt.*

Es ist zweckmäßig, dies in Matrizenschreibweise anzugeben:

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b},$$

mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Definition 12.5 *Das lineare Differentialgleichungssystem (kurz:* LDS*)*

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}, \quad \vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

wird inhomogen *genannt.*

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}. \tag{12.2}$$

heißt homogenes LDS.

Satz 12.6 *Sind $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r$ Lösungen von (12.2) und $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$, dann ist*

$$\begin{aligned} A(c_1\vec{y}_1 + \dots + c_r\vec{y}_r) &= c_1 A\vec{y}_1 + \dots + c_r A\vec{y}_r \\ &= c_1\vec{y}_1\,' + \dots + c_r\vec{y}_r\,' \\ &= (c_1\vec{y}_1 + \dots + c_r\vec{y}_r)', \end{aligned}$$

also ist jede Linearkombination von Lösungen des homogenen LDS auch Lösung.

Sind $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ Lösungen von (12.1) und ist $\vec{y}_h$ eine Lösung von (12.2), so erhält man

$$(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)' = \vec{y}_1\,' - \vec{y}_2\,' = (A\vec{y}_1 + \vec{b}) - (A\vec{y}_2 + \vec{b}) = A(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)$$

$\Rightarrow \vec{y}_1 - \vec{y}_2$ ist Lösung von (12.2), und

$$\vec{y}_1\,' + \vec{y}_h\,' = A\vec{y}_1 + \vec{b} + A\vec{y}_h = A(\vec{y}_1 + \vec{y}_h) + \vec{b}$$

$\Rightarrow \vec{y}_1 + \vec{y}_h$ ist Lösung von (12.1).
Damit erhält man

Satz 12.7 *Die allgemeine Lösung $\vec{y}_A$ des inhomogenen LDS (12.1) erhält man durch*

$$\vec{y}_A = \vec{y}_h + \vec{y}_p,$$

wobei $\vec{y}_h$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen LDS (12.2) und $\vec{y}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen LDS (12.1) ist.

Es gilt nun der

Satz 12.8 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Sind die Koeffizienten $a_{ik}(x)$ der Matrix A auf dem Intervall (a,b) stetig, so besitzt das homogene LDS $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ n linear unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ und*

$$\vec{y}_h = c_1\vec{y}_1 + \ldots + c_n\vec{y}_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung.

Sind $x_0 \in (a,b)$ und $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so existiert genau eine Lösung $\vec{y}$ von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

(Zur Erinnerung: $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ heißen linear unabhängig *auf (a,b), wenn aus*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\vec{y}_k \equiv \vec{0} \quad \textit{auf } (a,b)$$

folgt, daß $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ ist.)

Sind also $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ linear unabhängige Lösungen des homogenen LDS, so ist die allgemeine Lösung

$$\vec{y}_h = \sum_{k=1}^{n} c_k\vec{y}_k.$$

$\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ wird dann ein Fundamentalsystem *genannt.*

Es ist nun zweckmäßig, die *Wronski-Matrix*

$$\mathcal{W}(x) = (\vec{y}_1\ \vec{y}_2 \dots \vec{y}_n)$$

einzuführen.

Ist $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein Fundamentalsystem und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\vec{y}_h = \mathcal{W}(x)\vec{c}$$

die allgemeine Lösung.

Außerdem ist dann, mit $\mathcal{W}'(x) = (\vec{y}_1{}' \dots \vec{y}_n{}')$:

$$\mathcal{W}' = A\mathcal{W}.$$

Satz 12.9 *Es gilt: $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die* Wronski-Determinante

$$W(x) = |\mathcal{W}(x)| = |\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n|$$

auf (a, b) nicht gleich Null ist.

12.1.1 Lösung des inhomogenen LDS durch Variation der Konstanten

Ist $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ gegeben und ist $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen LDS $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\mathcal{W}(x)$ die Wronski-Matrix, $\vec{y}_h = \mathcal{W}(x)\vec{c}$, dann ist es naheliegend, zur Lösung des inhomogenen LDS den Ansatz

$$\vec{y}_p = \mathcal{W}(x)\vec{c}(x)$$

zu machen mit $\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$. Wie man leicht nachrechnet, gilt dann

$$\vec{y}_p{}' = \mathcal{W}'(x)\vec{c}(x) + \mathcal{W}(x)\vec{c}\,'(x).$$

Setzt man dies in das inhomogene LDS ein, so folgt

$$\mathcal{W}'(x) \cdot \vec{c}(x) + \mathcal{W}(x)\vec{c}\,'(x) = A\mathcal{W}(x)\vec{c}(x) + \vec{b},$$

also

$$(\mathcal{W}'(x) - A\mathcal{W}(x))\,\vec{c}(x) + \mathcal{W}(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{b}.$$

Da $\mathcal{W}'(x) = A\mathcal{W}(x)$ gilt, folgt dann

$$\mathcal{W}(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{b},$$

und weil $|\mathcal{W}(x)| \neq 0$, existiert die inverse Matrix $\mathcal{W}^{-1}(x)$, so daß man

$$\vec{c}\,'(x) = \mathcal{W}^{-1}(x)\vec{b}$$

erhält.
Damit folgt

$$\vec{c}(x) = \int \mathcal{W}^{-1}(x)\vec{b}(x)\,dx,$$

wobei auch die Integration komponentenweise durchgeführt wird.

Beispiel 12.10 Zu lösen

$$\begin{aligned} y_1' &= & y_2 &\quad + x \\ y_2' &= -\tfrac{1}{x-1}\,y_1 + \tfrac{x}{x-1}\,y_2 &&\quad + 1 \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise:

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x-1} & \frac{x}{x-1} \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das homogene LDS $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ besitzt das Fundamentalsystem $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$ (man prüfe durch Einsetzen nach).

$\Rightarrow$ Wronski-Matrix $\mathcal{W}(x) = \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{W}(x)^{-1} = \dfrac{e^{-x}}{x-1}\begin{pmatrix} e^x & -e^x \\ -1 & x \end{pmatrix}.$

Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}_p &= \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\ \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\ \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{e^{-x}}{x-1} \begin{pmatrix} e^x & -e^x \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{-x}}{x-1} \begin{pmatrix} e^x(x-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\ c_1'(x) = 1,\ c_2'(x) = 0 \\
\Rightarrow &\ c_1(x) = x,\ c_2(x) = 1 \\
\Rightarrow &\ \vec{y}_p = \mathcal{W}(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + e^x \\ x + e^x \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\ \vec{y}_A = \vec{y}_h + \vec{y}_p = \mathcal{W}(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \vec{y}_p = c_1 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} x^2 + e^x \\ x + e^x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Ist also die allgemeine Lösung des homogenen LDS bekannt, so kann man das inhomogene LDS durch Variation der Konstanten lösen. Wenn allerdings die Matrix A von x abhängig ist, so gibt es keine allgemeingültigen Lösungsverfahren zur Lösung des homogenen LDS.

12.2 Homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Definition 12.11 *Ist in dem homogenen LDS $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ die Matrix A konstant, so spricht man von einem* homogenen linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, *kurz:* LDSK.

Ausführlich geschrieben:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\
&\ \vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

Zur Lösung solcher Systeme werden wir zwei Verfahren behandeln.

12.2.1 Entkopplung

Hier eliminiert man $y_2, y_3, \ldots, y_n$ aus dem System, so daß nur eine lineare Dgl. in y_1 übrigbleibt, löst diese und erhält dann $y_2, \ldots, y_n$ in Abhängigkeit von y_1. Dies geht folgendermaßen: Man differenziert in (12.3) die 1. Zeile $(n-1)$-mal, die 2. Zeile $(n-2)$-mal,..., die $(n-1)$-te Zeile einmal und erhält

$$\begin{array}{lcll}
y_1^{(n)} & = & a_{11}y_1^{(n-1)} + a_{12}y_2^{(n-1)} + \ldots & + a_{1n}y_n^{(n-1)} \\
y_1^{(n-1)} & = & a_{11}y_1^{(n-2)} + \ldots & + a_{1n}y_n^{(n-2)} \\
 & \vdots & & \\
y_1' & = & a_{11}y_1 + \ldots & + a_{1n}y_n \\
y_2^{(n-1)} & = & a_{21}y_1^{(n-2)} + \ldots & + a_{2n}y_n^{(n-2)} \\
 & \vdots & & \\
y_2' & = & a_{21}y_1^{(n-1)} + \ldots & + a_{2n}y_n \\
 & \vdots & & \\
y_{n-1}'' & = & a_{n-1,1}y_1' + \ldots & + a_{n-1,n}y_n' \\
y_{n-1}' & = & a_{n-1,1}y_1 + \ldots & + a_{n-1,n}y_n \\
y_n' & = & a_{n1}y_1 + \ldots & + a_{nn}y_n
\end{array}$$

Man erhält damit $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n}{2}(n+1)$ lineare Gleichungen für die zu eliminierenden Funktionen $y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, y_3, y_3', \ldots, y_3^{(n-2)}, \ldots, y_{n-1}', y_{n-1}, y_n$ (dies sind ebenfalls $\frac{n}{2}(n+1)$ Funktionen) und gelangt dann zu einer linearen Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in y_1, löst diese und erhält dann $y_2, \ldots, y_n$ in Abhängigkeit von y_1.

Beispiel 12.12

$$\begin{array}{lcl}
y_1' & = & y_1 + 2y_2 \\
y_2' & = & -2y_1 + y_2
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lcl}
y_1'' & = & y_1' + 2y_2' \\
y_1' & = & y_1 + 2y_2 \\
y_2' & = & -2y_1 + y_2
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lcl}
y_1'' & = & y_1' + 2(-2y_1 + y_2) \\
2y_2 & = & y_1' - y_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\Rightarrow & y_1'' = y_1' - 4y_1 + y_1' - y_1 \\
\Rightarrow & y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = 0, \quad y_1 = e^{\lambda x} \\
\Rightarrow & \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i \\
\Rightarrow & y_1 = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \\
\Rightarrow & y_2 = \dfrac{1}{2}(y_1' - y_1) = \dfrac{1}{2}e^x(2c_2 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x) = e^x(c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x).
\end{array}$$

□

Die Entkoppelungsmethode ist aber nur sinnvoll, wenn n klein ist, da z. B. für $n = 20$ zunächst 210 Gleichungen mit 210 Variablen zu lösen wären.

Allerdings liefert sie einen Hinweis auf die Lösungsstruktur des Homogenen LDSK: Man sieht, daß die Lösungen von der Form

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_j=0}^{r_j} \vec{c}_{j,k_j} x^{k_j} e^{\lambda_j x}$$

sind, wobei λ_j die Nullstellen der char. Gleichung von y_1 mit der Vielfachheit r_{j+1} sind.

Daher ist es vernünftig, zur Lösung des LDSK $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ den Ansatz

$$\vec{y} = \vec{a}e^{\lambda x}$$

zu machen. Dies führt zur

12.2.2 Eigenwertmethode

Der Ansatz

$$\vec{y} = \vec{a}e^{\lambda x}, \quad \vec{y}\,' = \vec{a}\lambda e^{\lambda x}$$

ergibt in $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ eingesetzt:

$$\vec{a}\lambda e^{\lambda x} = A\vec{a}e^{\lambda x}$$

und somit das Eigenwertproblem (siehe Mathematik I)

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}.$$

Ist λ_0 ein Eigenwert und $\vec{a}_0$ ein zu λ_0 gehörender Eigenvektor, so ist $\vec{y}_0 = \vec{a}_0 e^{\lambda_0 x}$ Lösung des LDSK $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Wenn nun z. B. alle Eigenwerte der Matrix untereinander verschieden sind, so erhält man ein Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1 = \vec{a}_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, \vec{y}_n = \vec{a}_n e^{\lambda_n x}.$$

Ebenso erhält man, wenn die Matrix A symmetrisch ist, ein Fundamentalsystem (da dann A n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt).

Beispiel 12.13

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$\begin{array}{cc|c} -2i & 2 & 0 \\ -2 & -2i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \cdot i \\ \\ \end{array} \quad \vec{a}_1 = (a_1, a_2) \Rightarrow -ia_1 + a_2 = 0,$$

z. B. $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = i \Rightarrow \vec{a}_1 = (1, i)$.

$\lambda_2 = 1 - 2i$:

$$\begin{array}{cc|c} 2i & 2 & 0 \\ -2 & 2i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \cdot i \\ \\ \end{array} \quad \vec{a}_2 = (b_1, b_2) \Rightarrow ib_1 + b_2 = 0 \Rightarrow \vec{a}_2 = (1, -i).$$

$$\Rightarrow \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+2i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos 2x + i \sin 2x),$$

$\vec{Y}_2 = \bar{\vec{Y}}_1$ komplexe Lsg.

$$\Rightarrow \vec{y}_1 = \operatorname{Re} \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} e^x, \quad \vec{y}_2 = \operatorname{Im} \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} e^x$$

ist ein Fundamentalsystem, $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2$ allgemeine Lösung.

Hierbei wurde benutzt, daß sowohl Realteil als auch Imaginärteil einer komplexen Lösung eines LDSK reelle Lösungen sind. □

Wenn allerdings die Matrix A nicht symmetrisch ist und mehrfache Eigenwerte besitzt, kann es sein, daß die Matrix A weniger als n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, so daß man zunächst kein Fundamentalsystem erhält.

Um das Verfahren für diese Fall vorzubereiten, zunächst einige Überlegungen.

Definition 12.14 *Ist die Matrix A gegeben, so definiert man die* Exponentialmatrix

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

wobei $A^0 = E$ gesetzt wird.

Damit ist e^A wieder eine Matrix, denn ist $\max_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} |a_{jk}| = M$, dann sind alle Elemente von A^k dem Betrag nach $\leq (nM)^k$, so daß die Reihe konvergent ist.
Insbesondere ist dann

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k$$

eine für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Matrizenreihe, und wegen

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} = Ae^{Ax}$$

folgt dann, daß $\mathcal{W}(x) = e^{Ax}$ Wronski-Matrix zu $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist, denn es ist $\mathcal{W}(0) = E \neq 0$ und $\mathcal{W}'(x) = A\mathcal{W}(x)$.
Also ist $\vec{y} = e^{Ax}\vec{c}$ die allgemeine Lösung von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, allerdings ist die Exponentialmatrix mehr von theoretischem als von praktischem Wert.
Da speziell

$$e^{\lambda E x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} E^{\nu} \frac{\lambda^{\nu} x^{\nu}}{\nu!} = E \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{\nu}}{\nu!} = E \cdot e^{\lambda x}$$

gilt, ferner für Matrizen A, B mit $AB = BA$ folgt, daß

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{j} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(j-\nu)!} A^{\nu} B^{j-\nu} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} A^{\nu} B^{j-\nu} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A+B)^j = e^{A+B}
\end{aligned}$$

ist, gilt

$$e^{Ax} = e^{Ax}e^{-\lambda Ex+\lambda Ex} = e^{Ax}e^{-\lambda Ex}e^{\lambda Ex} = e^{(A-\lambda E)x}e^{\lambda Ex},$$

und ist λ_k ein Eigenwert und $\vec{a}_k$ ein zu λ_k gehörender Eigenvektor von A, so ist

$$\begin{aligned} \vec{y}_k &= e^{Ax}\vec{a}_k \\ &= e^{(A-\lambda_k E)x} \cdot Ee^{\lambda_k x}\vec{a}_k \\ &= \left(E + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l!}(A-\lambda_k E)^l\right) \vec{a}_k e^{\lambda_k x} \\ &= \vec{a}_k e^{\lambda_k x} + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l!}(A-\lambda_k E)^l \vec{a}_k\right) e^{\lambda_k x} \\ &= \vec{a}_k e^{\lambda_k x} \end{aligned}$$

eine schon bekannte Lösung.

Ist nun aber λ_k ein j-facher Eigenwert mit nur $j - r = m$ linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{a}_{k_1}, \ldots, \vec{a}_{k_m}$, so bestimmt man die sogenannten Hauptvektoren.

Definition 12.15 $\vec{a}_\mu$ *heißt* Hauptvektor μ-ter Stufe zu A bzgl. λ_k*, wenn*

$$(A - \lambda_k E)^{\mu-1}\vec{a}_\mu \neq \vec{0}, \quad (A - \lambda_k E)^{\mu}\vec{a}_\mu = \vec{0}.$$

Da mit $\vec{b}_\mu = (A - \lambda_k E)\vec{a}_\mu$ gilt: $(A - \lambda_k E)^{\mu-1}\vec{b}_\mu = \vec{0}$, ist demnach $\vec{b}_\mu$ Hauptvektor $\mu - 1$-ter Stufe, so daß man die Hauptvektoren zu λ_k folgendermaßen erhält:

Man bestimmt zunächst die Eigenvektoren $\vec{a}_1$ zu λ_k, löst dann

$$(A - \lambda_k E)\,\vec{x} = \vec{a}_1$$

und erhält damit die Hauptvektoren 2. Stufe $\vec{a}_2$, löst

$$(A - \lambda_k E)\,\vec{x} = \vec{a}_2$$

und erhält die Hauptvektoren 3. Stufe $\vec{a}_3$ und setzt dies fort, bis das Verfahren abbricht, was spätestens nach r Schritten der Fall ist.

Ist nun $\vec{a}_\mu$ ein Hauptvektor der Stufe $\mu \geq 2$ zu λ_k, dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{y}_\mu &= e^{(A-\lambda_k E)x}Ee^{\lambda_k x}\vec{a}_\mu \\ &= \vec{a}_\mu e^{\lambda_k x} + \sum_{l=1}^{\mu-1} \frac{x^l}{l!}(A-\lambda_k E)^l \vec{a}_\mu e^{\lambda_k x}, \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned}(A-\lambda_k E)^l \vec{a}_\mu &= (A-\lambda_k E)^{l-1}(A-\lambda_k E)\vec{a}_\mu \\ &= (A-\lambda_k E)^{l-1}\vec{a}_{\mu-1} \\ &= \dots \\ &= \vec{a}_{\mu-l}\end{aligned}$$

folgt:

$$\vec{y}_\mu = \left(\vec{a}_\mu + \sum_{l=1}^{\mu-1} \frac{x^l}{l!}\,\vec{a}_{\mu-l}\right) e^{\lambda_k x}$$

ist Lösung des LDS.

Auf diese Weise erhält man dann für das LDS n linear unabhängige Lösungen.

Beispiel 12.16

$$\begin{array}{lclll} y_1' &=& 15y_1 & & -3y_3 \\ y_2' &=& & 3y_2+6y_3 & \\ y_3' &=& 6y_1 & -3y_2 & +9y_3 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $|A-\lambda E| = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 15-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 6 \\ 6 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} &= (15-\lambda)[\lambda^2-12\lambda+45]-12(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3+27\lambda^2-243\lambda+729 \\ &= -(\lambda-9)^3\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 9$ ist dreifacher Eigenwert.

Eigenvektoren: $(A-9E)\vec{a} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{rrr|l} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \vec{a}_1 = t(1,2,2),$$

und es existieren keine weiteren zu $\vec{a}_1$ linear unabhängigen Eigenvektoren. Also müssen zwei Hauptvektoren höherer Stufe berechnet werden: $(A-9E)\vec{x} = \vec{a}_1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rrr|l} 6 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \vec{x} = t(1,2,2) - \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Man erhält damit nur einen Hauptvektor 2. Stufe $\vec{a}_2 = -(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, also muß noch einer der dritten Stufe berechnet werden: $(A-9E)\vec{x} = \vec{a}_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rrr|l} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & \frac{2}{3} \\ 6 & -3 & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \vec{x} = t(1,2,2) + \left(0, \frac{1}{9}, 0\right) \Rightarrow \vec{a}_3 = \frac{1}{9}(0,1,0).$$

Es ist nun $(A-9E)\vec{x} = \vec{a}_3$ nicht mehr lösbar und $(A-9E)^3 = 0$. Das Verfahren bricht ab, aber man hat nun auch die drei Lösungen

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 &= \vec{a}_1 e^{9x} = (1,2,2)e^{9x}, \\ \vec{y}_2 &= (\vec{a}_2 + x\vec{a}_1)e^{9x} = \left(-\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + x(1,2,2)\right) e^{9x}, \\ \vec{y}_3 &= \left(\vec{a}_3 + x\vec{a}_2 + \frac{1}{2}x^2\vec{a}_1\right) e^{9x} \\ &= \left[\left(0, \frac{1}{9}, 0\right) - x\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{18}x^2(0,1,0)\right] e^{9x}, \end{aligned}$$

die offensichtlich linear unabhängig sind. □

12.2.3 Anhang

Es wird nun gezeigt, daß sich jedes System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y},\ A \neq 0 \text{ konstante } n,n\text{-Matrix}$$

durch Entkoppelung lösen läßt, und zwar induktiv.

Im Fall $m = 1$ ist nichts zu zeigen.

Sei dies schon für ein $n-1,\ n \geq 2$ gezeigt und A eine n,n-Matrix, $A \neq 0$, $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Dann besitzt A mindestens einen Eigenwert λ_1 und einen dazu gehörenden Eigenvektor $\vec{b}_1$ mit $|\vec{b}_1| = 1$. Dann läßt sich $\vec{b}_1$ zu einer Orthonormalbasis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ des $\mathbb{R}^n$ ergänzen und es sei $U = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$, $\vec{y} = U\vec{v}$, dann gilt $\vec{v} = U^\top \vec{y}$, $\vec{y}\,' = U\vec{v}\,'$ und somit $\vec{y}\,' = U\vec{v}\,' = A\vec{y} = AU\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\,' = U^\top AU\vec{v}$, und da $\vec{b}_1$ Eigenvektor zu λ_1 ist, gilt $AU = (\lambda_1 \vec{b}_1 \vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n)$ und somit

$$U^\top AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

also

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{12} \ldots d_{1n} \\ 0 & \begin{pmatrix} d_{22} \ldots d_{2n} \\ \vdots \\ d_{n2} \ldots d_{nn} \end{pmatrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \vec{v},$$

und somit

$$v_1' = \lambda_1 v_1 + \sum_{\nu=2}^{n} d_{1\nu} v_\nu, \qquad \begin{pmatrix} v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung läßt sich dieses System durch Entkopplung lösen und damit offensichtlich auch $\vec{v}\,' = U^\top AU\vec{v}$, und da $\vec{y} = u\vec{v}$ ist, auch $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Die charakteristische Gleichung der durch Entkopplung gewonnenen LDG n-ter Ordnung stimmt offensichtlich mit der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0$$

überein.