Aufgaben Grundlagen

Rechenregel:
Potenzen: $a, b, c, d.... \in R$
$a)\ a^0 = 1\ ,\ a^{-b} = \frac{1}{a^b}\ ,\ a \neq 0$, $b)\ a^{b+c} = a^b a^c$, $c)\ (a^b)^c = a^{bc}$,
$d)\ a^b c^b = (ac)^b$, $e)\ (\frac{a}{b})^c = \frac{a^c}{b^c}\ ,\ b \neq 0$
Achtung: *Sind* $a, b \neq 0\ ,\ c \neq 1$, *dann ist* $(a+b)^c \neq a^c + b^c$!!!!!!

Wurzeln: Da man die n-te Wurzel als Potenz mit Exponenten $\frac{1}{n}$ auffassen kann, übertragen sich die obigen Rechenregeln auf die Wurzelrechnung.

Brüche: $a, b, c, d.... \in R$
$a)\ \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\ ,\ b, d \neq 0$ $b)\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}\ ,\ b, c, d \neq 0$ $c)\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}\ ,\ b, d \neq 0$,
hier wird aber besser als Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache von b und d genommen, da sonst bei der Addition von mehreren Brüchen der Aufwand unnötig erhöht wird und die Übersichtlichkeit leidet.Insbesondere ist
$d)\ \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}\ ,\ b \neq 0$,

Logarithmen:
Wegen $\ln x = \ln a^{log_a x}\ ,\ a > 0, a \neq 1$, gelten die hier für den natürlichen Logarithmus angegebenen Gesetze für jeden Logarithmus [abgesehen von e) dort gilt dann $a^{log_a x} = x$.]

$a)\ \ln 1 = 0$ $b)\ \ln(ab) = \ln a + \ln b\ ,\ a, b > 0, \ln a$ ist in R nur für $a > 0$ definiert
$c)\ \ln(a^b) = b \ln a$, $d)\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\ ,\ \ln \frac{1}{b} = -\ln b$, $e)\ e^{\ln a} = a$

Achtung: *Aus* $\ln a + \ln b = \ln c$ folgt $ab = c$ und **nicht** $a + b = c$!!!!!!

Aufgaben:

1. Man vereinfache so weit wie möglich:

$$a)\ \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{2-x}\quad ,b)\ \frac{\frac{x^3-1}{a^2-b^2}}{\frac{x^2+x+1}{b+a}} - \frac{x-1}{a-b}\quad c)\ \frac{1}{2}\ln(x^8+x^6) - 6\ln(\sqrt{x}) + \ln\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$d)\ \frac{a^2+ab}{b^3-a^3} + \frac{\sqrt{a^4b^2-4a^3b+4a^2}}{a^2+ab+b^2}\quad e)\ (x^{2n-2} - \ln(e^{x^{n-1}})^2 + 1) : (x^n - x)\ ,\ n \in N\quad ,$$

2. Man löse nach x auf:

$$a)\ \frac{1}{x}-\frac{2}{a}=-x \quad ,b)\ \frac{\frac{x}{x^2-1}}{\frac{x+2}{x+1}}=\frac{x-2}{x^2+x-2} \quad c)\ \frac{1}{2}\ln x^6-\frac{2}{a}\ln(5\sqrt{x})=\ln\frac{1}{x^2}$$

$$d)\ \frac{x^2a}{b^3}=\frac{\sqrt{x^{2d}e}}{b^7}:\frac{x^{d-1}b}{e^d} \quad e)\ x^{2n-1}+ax^{n-1}=\frac{b}{\ln e^{2x}}\ ,\ n\in\mathrm{N} \quad ,$$

$$f)\ e^{2x}+2e^{x+1}=2 \quad g)\ \frac{2\sqrt{x^2a^2+8x^2a+16x^2}}{x^2+x-2}=\frac{a}{x-1}$$

3. Man vereinfache so weit wie möglich:

$$a)\quad \frac{\sqrt{a^5b^2+4ba^3+4a}}{(a^2b^2-2b)^2+8a^2b^3} \qquad\qquad b)\quad \frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x^2+x}\ .$$

4. Man bestimme alle reellen a,b mit

a) $\sqrt{ab}\geq\frac{1}{2}(a+b)$

b) $\dfrac{1}{(a-b)^2}>\dfrac{1}{(a+b)^2}$

5. Man bestimme alle reellen Lösungen zu

$x^2=5|x|-6$