Aufgaben zu Mathematik I für ET Ws13/14

*1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (1, -1, 1) \quad , \quad \vec{b} = (-2, -1, 1) \quad \textit{und} \quad \vec{c} = (2, 1, 1) \; .$$

Berechnen Sie

a) $2\vec{a} - \vec{b}$, *b)* $\vec{b}(\vec{c} + 2\vec{a})$, *c)* $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, *d)* $\vec{a} \times \vec{c}$,

e) den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

*2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{b} = (t, 2, t+1)$ *und* $\vec{c} = (1-t, t+2, 1)$.
Bestimmen Sie alle $t \in R$, für welche

a) das $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm minimalen Flächeninhalt besitzt,

b) die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

3. Gegeben ist das Polynom $P(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^2 - 16x - 8$.
a) Berechnen Sie mit Hilfe des Hornerschemas $P(x)$ für $x = 3, \pm 2, \pm 1$.
b) Zerlegen Sie $P(x)$ in irreduzible Faktoren in R .

*4. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung sowie den Definitionsbereich von f , f' .

a) $f(x) = x\ arctan\ x + e^x$ *b)* $f(x) = \ln\left(\sqrt[4]{x^3 e^x}\sin^2 x\right)$ *c)* $f(x) = 2^{\tan x}$

d) $f(x) = \cosh\left(arsinh x^2\right)$ *e)* $f(x) = arcsin(cos x)$ *f)* $f(x) = sinh\ (\ln x^4)$

g) $f(x) = x^x$

5. Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, daß für alle $x \geq 0$ gilt
$\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

*6. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 1}{\sinh x^2} \qquad b) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{arctan e^x}{x} \qquad c) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\cosh x}$$

$$d) \quad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\sin^{-2} x} \qquad e) \quad \lim_{x\to 1} (\sin^2 \pi x)^{x^2 - 1}$$

$$f) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{\sin x}\right) \qquad g) \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan^2 x)^{\cos x} .$$

7. Bestimmen Sie die Schnittpunkte und Schnittwinkel zwischen den durch

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \qquad und \qquad y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1$$

gegebenen Kurven .

*8. Berechnen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$ zweiten Grades von

$$f(x) = arctan\ x \ - \ arctan\ 4 \quad an\ der\ Stelle \quad x_0 = 4$$

und schätze die Fehlerfunktion $\Delta(x) = |f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $[3, 5]$ ab.

9. Berechnen Sie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} .$$

10. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz,absolute Konvergenz bzw. Divergenz.

$$a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \qquad b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k+2} \qquad c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k!}$$

11. Bestimmen Sie den jeweiligen Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$*a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)} x^n \quad , \quad *b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cos(k\pi)(x-4)^k \quad , \quad c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k^2} .$$

*12. Berechnen Sie zu den komlexen Zahlen $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$ *und* $z_3 = 3 - 4i$

$$z_1 z_3 \ , \ |z_3 - z_1| \ , \ \frac{z_1}{z_2}\bar{z}_3 \ und\ die\ Eulersche\ Darstellung\ von\ z_3 .$$

*13. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$a)\quad (1-i)z + \frac{2-i}{1+i}\bar{z} = 2+3i\ , \qquad b)\quad z^4 + i8\sqrt{3} + 8 = 0\ ,$$

$$c)\quad z^4 + 2(1-i)z^2 - 4i = 0 \quad , \quad d)\quad z^2 - i^i = 0\ .$$

*14. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t+3 & -2 & -t-1 \\ t+4 & t-2 & -3 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $A^T B$, $(2B-C)A$.
b) Berechnen Sie die Determinanten $|B|$, $|C|$, $|AA^T|$.
c) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$B\vec{x} = \vec{b} \quad , \quad A\vec{x} = \vec{b} \quad , \quad mit\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad bzw.\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

d) Bestimmen Sie alle $t \in \mathrm{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

α) genau eine Lösung , β) unendlich viele Lösungen , γ) keine Lösung besitzt.

*15. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -10 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 3t+2 & t-1 & t+3 \\ t & t-2 & 2 \\ 2 & 2-t & t \end{pmatrix} \ und\ der\ Vektor\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie A^{-1} .
b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathrm{R}$,für welche das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen besitzt und berechne diese Lösungen.
c) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel .

*16. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} .$$

Die mit einem * versehenen Aufgaben werden besonders zur Bearbeitung empfohlen.