Aufgaben zu $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$

1) Man berechne die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = (x+y^2)\,e^{y-x}$

b) $f: \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = (z+x)\ln(xy)$

a) $\frac{\partial}{\partial x} f = e^{y-x}(-y^2-x+1)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f = e^{y-x}(2y+x+y^2)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = e^{y-x}(y^2+x-2)$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = e^{y-x}(1-y^2-2y-x)$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = e^{y-x}(y^2+4y+x+2)$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f = \ln(xy) + \frac{z}{x} + 1$ $\quad \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{z+x}{y}$, $\frac{\partial}{\partial z} f = \ln(xy)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{1}{x} - \frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f \equiv 0$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{z+x}{y^2}$

$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f = \frac{1}{y}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} f \equiv 0$

2) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f: (x,y) \to f(x,y) = x^2 - 4x + y^2$

a) Man bestimme die Niveaulinien von f

b) Man berechne $\operatorname{grad} f(x,y)$ sowie die Gleichung der Tangentialebene für $(x_0,y_0) = (1,3)$ und die Richtungableitung von in Richtung $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\quad \alpha \in [0, 2\pi)$ bei $(x_0,y_0) = (-2,1)$.

a) Niveaulinien $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 = c$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = c+4 = d$, Ist $\emptyset$ für $d<0$ also $c<-4$

ausgeartet $(2,0)$ für $c=-4$

und Kreise $(x-2)^2 + y^2 = d$ für $c > -4$

Mittelpunkt $(2,0)$ Radius $\sqrt{d}$

2 b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f\right) = (2x-4, 2y)$

Tangentialebene in $(1, 3; f(1,3))$:

$z - f(1,3) - \operatorname{grad} f(1,3)\,(x-1, y-3) = 0$

wegen $\operatorname{grad} f(1,3) = (-2, 6)$, $f(1,3) = 6$

$\Rightarrow \quad z - 6 + 2(x-1) - 6(y-3) = 0$

$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y)\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$(x_0, y_0) = (-2, 1) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,y)\Big|_{(-2,1)} = (-8, 2)(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$= -8\cos\alpha + 2\sin\alpha$

(Ist maximal, wenn $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4, 1)$ ist,

Dann ist $\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(x,y)\Big|_{(-2,1)} = |\operatorname{grad} f(-2,1)| = 2\sqrt{17}$.)

3.

Man berechne die Hesse-Matrix zu

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f: (x,y) \to f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$

$f_x = y\,e^{x-y}(x+1) \qquad f_y = x\,e^{x-y}(1-y)$

$f_{xx} = y\,e^{x-y}(x+2) \qquad f_{xy} = f_{yx} = e^{x-y}(1-y)(1+x)$

$f_{yy} = x\,e^{x-y}(y-2)$

$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = e^{x-y}\left(y(x+1), x(1-y)\right)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} y(x+2)e^{x-y} & (1-y)(1+x)e^{x-y} \\ (1-y)(1+x)e^{x-y} & x(y-2)e^{x-y} \end{pmatrix}$$