Integrierender Faktor: Beispiele

1) Die Dgl. $2xyy' + y^2 + 2x - xy^2 - x^2 = 0$

besitzt einen integrierenden Faktor, der nur von einer Variablen abhängig ist. Man bestimme diesen und löse das

AWP $y(1) = 1$.

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \underbrace{2xy}_{Q}\,dy + [\underbrace{y^2 + 2x - xy^2 - x^2}_{P}]\,dx = 0$

$Q := 2xy \qquad P := y^2 + 2x - xy^2 - x^2$

$Q_x = 2y \qquad P_y = 2y - 2xy \Rightarrow$

$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2xy}{2xy} = -1$ (von y unabhängig)

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$ ist integrierender

Faktor $\Rightarrow \underbrace{2xye^{-x}}_{Q_1}dy + \underbrace{[y^2 + 2x - xy^2 - x^2]e^{-x}}_{P_1}dx = 0$

ist exakt

$f(x,y) = \int Q_1\,dy = \int 2yxe^{-x}\,dy + \varphi(x) = xy^2e^{-x} + \varphi(x)$

$\frac{\partial}{\partial x} f = y^2(-x+1)e^{-x} + \varphi'(x) = P_1 = y^2(1-x)e^{-x} + e^{-x}(2x - x^2)$

$\Rightarrow \varphi'(x) = e^{-x}(2x - x^2) \Rightarrow \varphi(x) = x^2e^{-x}$

$\Rightarrow f(x,y) = xy^2e^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(xy^2 + x^2)$

$\Rightarrow$ Lösungen der Dgl:

$e^{-x}(xy^2 + x^2) = c \qquad \Rightarrow xy^2 + x^2 = ce^x$

$\Rightarrow y^2 = \frac{c}{x}e^x - x \qquad y(1) = 1 \Rightarrow 1 = ce - 1$

$\Rightarrow c = 2e^{-1} \qquad \Rightarrow y^2 = 2e^{x-1} - x$

$y = \sqrt{2e^{x-1} - x}$

2)

$(2x + 3x^2y)y' + y + 2xy^2 = 0 \qquad y(1) = 1$

zu lösen. $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$(\underbrace{2x + 3x^2y}_{\tilde{Q}})\,dy + (\underbrace{y + 2xy^2}_{\tilde{P}})\,dx = 0$

$\tilde{Q} = 2x + 3x^2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\tilde{Q} = 2 + 6xy$

$\tilde{P} = y + 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\tilde{P} = 1 + 4xy$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{P}_y - \tilde{Q}_x}{\tilde{Q}} = \frac{-1-2xy}{2x+3x^2y}$$ ist nicht von $y$ unabhängig.

$\Rightarrow$ $\mu(x)$ existiert nicht

$$\frac{Q_y - P_x}{P} = \frac{1+2xy}{y+2xy^2} = \frac{1}{y}$$ (von $x$ unabhängig)

$\Rightarrow$ $\mu(y)$ existiert $\quad \mu(y) = e^{\int \frac{Q_y - P_x}{P} dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$

$\Rightarrow$ Dgl : $(\underbrace{2xy+3x^2y^2}_{Q})dy + (\underbrace{y^2+2xy^3}_{P})dx = 0$

ist exakt. Potentialfunktion:

$$f(x,y) = \int P\,dx + \varphi(y) = \int (y^2+2xy^3)\,dx + \varphi(y)$$
$$= xy^2 + x^2y^3 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = 2xy + 3x^2y^2 + \varphi'(y) = Q = 2xy + 3x^2y^2$$

$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y)$ kann $\equiv 0$ gewählt werden $\Rightarrow f(x,y) = xy^2 + x^2y^3$ und

$xy^2 + x^2y^3 = c$ ist die implizite allgem. Lösung der Dgl. AWP $y(1) = 1$

$\Rightarrow c = 2$ Lösung $xy^2 + x^2y^3 - 2 = 0$

ist die implizite Lösung.