Beispiele zur Linearen unabhängigkeit von Funktionen:

1. Die Monome x^j, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ sind auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Es gilt für das Polynom $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \equiv 0$

$\Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0.$

2. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$) paarweise verschieden $\Rightarrow$ $f_j : x \mapsto e^{\lambda_j x}$ $j = 1, \dots, n$ sind linear unabhängig auf $\mathbb{R}$

3) Die Funktion $\sin(\nu x)$, $\cos(\nu x)$ $\nu \in \mathbb{Z}$ sind Linear unabhängig.

Beispiele zur homogen linearen Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Man löse die homogenen Dgln.

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$

Lösungsansatz: $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 3e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 2\lambda - 3) \equiv 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{4} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -3$

$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$ bilden ein Fundamentalsystem $\Rightarrow$

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$

2) $y''' + 3y'' - 4y = 0$, Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$(y^{(j)} = \lambda^j e^{\lambda x}) \Rightarrow$ Charakteristische Gleichung

$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ein Nullstelle

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$ $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$

$\Rightarrow y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$ und $y_3 = x e^{-2x}$ bilden ein Fundamentalsystem $\Rightarrow$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-2x}.$

3) $3y''' + 5y'' + 4y' - 2y = 0$, Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow 3\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$ char. Gl.

Durch probieren erhält man $\lambda_1 = \frac{1}{3}$

Hornerschema

	3	5	4	-2
$\frac{1}{3}$		1	2	2
	3	6	6	0

$\Rightarrow 3\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm i$.

$\Rightarrow$ Komplexes Fundamentalsystem

$y_1 = e^{\frac{1}{3}x}$, $y_2 = e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i \sin x)$

$y_3 = e^{(1-i)x} = e^x(\cos x - i \sin x)$

$\Rightarrow$ Reelles Fundamentalsystem

$y_1 = e^{\frac{1}{3}x}$ $y_2 = \mathrm{Re}\, y_2 = e^x \cos x$, $y_2 = \mathrm{Im}\, y_2 = e^x \sin x$

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + (c_2 \cos x + c_3 \sin x) e^x$.

Beispiel zur Variation der Konstanten:

Die homogene Dgl. $(x+1)y'' + xy' - y = 0$

besitzt die Lösungen $y_1 = x$, $y_2 = e^{-x}$ (linear unabh.)

Man löse $(x+1)y'' + xy' - y = (x+1)^2$

(Probe $y_1 = x \Rightarrow (x+1)y_1'' + xy_1' - y_1 = x - x = 0$ ✓

$y_2 = e^{-x} \Rightarrow (x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = 0$ ✓

Normierung $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1} = x+1 = s(x)$

Bestimmung von y_p durch Variation der Konstanten:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 e^{-x}$$

Ansatz $y_p = c_1(x)\,x + c_2(x)\,e^{-x}$

Wronski det. $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}(x+1)$

$$\Rightarrow c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -\frac{e^x}{x+1}\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ x+1 & -e^{-x} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow c_1(x) = x$$

$$c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = -\frac{e^x}{x+1}\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = -xe^x$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = -xe^x + \int e^x dx = (1-x)e^x$$

$$\Rightarrow y_p = c_1(x)\,x + c_2(x)\,e^{-x} = x^2 - x + 1$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung ist (Superpositionsprinzip)

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 e^{-x} + x^2 - x + 1.$$