Im Kapitel: Gewöhnlich Differenzialgleichungen werden wir es speziell mit dem Fall $n=2$ zu tun haben, Also $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$

Dann sind Niveaulinien von f durch

$N_c = \{(x,y) \mid (x,y) \in M \wedge F(\vec{x}) = f(\vec{x}) - c = 0\}$ definiert.

Satz: über implizite Funktionen:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck und $F: M \to \mathbb{R}$ auf $M = I_1 \times I_2$ stetig diffbar und es gelte für $(x_0, y_0) \in M$ $F(x_0, y_0) = 0$, außerdem sei $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)_{(x_0,y_0)} \neq 0$, dann existiert

ein Intervall $I = (a,b) \subset I_1$ mit $x_0 \in I$ und eine Funktion $\varphi: I \to I_2$, mit $\varphi(x_0) = y_0 \wedge F(x, \varphi(x)) = 0$

Außerdem ist dann $\varphi: I \to I_2$ stetig diffbar und es gilt

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x, \varphi(x))}{\frac{\partial}{\partial y} F(x, \varphi(x))}, \quad x \in I.$$

Man nennt dann φ eine <u>implizite Funktion</u>, die durch $F(x,y) = 0$, $F(x_0, y_0) = 0$ definiert wird.

Man kann dann, wenn F auf M beliebig oft diffbar ist, durch wiederholtes Differenzieren von $F(x, \varphi(x)) = 0$ (Kettenregel) jede beliebige Ableitung $\varphi^{(j)}(x_0)$ bestimmen.

Beispiel:

1. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 + 8y$

und $(x_0, y_0) = (0,0)$ $\quad F$ ist stetig diffbar

grad $F(x,y) = (2x-2, 8y+8) \neq (0,0)$ für $(x,y) \neq (1,-1)$

und da $F(1,-1) = -4 \neq 0$ ist, sind alle Bedingungen erfüllt, $\frac{\partial}{\partial y} F(\vec{x}) = 8y + 8$

$\Rightarrow \exists\ \varphi(x)$ mit $\varphi(0) = 0$, $F(x, \varphi(x)) = 0$.

und $\varphi'(x) = -\frac{2x-2}{8\varphi(x)+8}$ $\left(\Rightarrow \varphi'(0) = \frac{1}{4}\right)$

und wegen $F(x, \varphi(x)) = x^2 - 2x + 4\varphi(x)^2 + 8\varphi(x) = 0$
und $\varphi(0) = 0$ $\Rightarrow \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = 2x - 2 + 8\varphi'(x)\varphi(x) + 8\varphi'(x) = 0$ $(*)$
$x = 0$ ergibt $-2 + 8\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = \frac{1}{4}$
nochmaliges diff. von $(*)$ nach x ergibt

$2 + 8\varphi''(x)\varphi(x) + 8\varphi'(x)^2 + 8\varphi''(x) = 0$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \frac{1}{4}$ eingesetzt

$\Rightarrow 2 + \frac{1}{2} + 8\varphi''(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = -\frac{5}{16}$ u.s.w.

Damit besitzt φ bei $x_0 = 0$ das Taylorpolynom

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 = \frac{1}{4}x - \frac{5}{32}x^2 .$$

Relative Extremwerte im $\mathbb{R}^n$:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ $f: M \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und $\vec{x}_0 \in M$ ein innerer Punkt (d.h. Es existiert ein $r > 0$, so dass $\{\vec{x} \mid \|x - x_0\| < r\} \subset M$ gilt) Dann gilt

<u>Satz</u>: Besitzt f bei $\vec{x}_0$ ein relatives Extremum dann ist $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

Man nennt dann $\vec{x}_0$ einen kritischen Punkt

(Das folgt aus $f(\vec{x}) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0)(\vec{x} - x_0) + \mathcal{R}(x, x_0)$)

Um zu bestimmen, ob f bei x_0 ein Extremum besitzt, ist manchmal die Hesse-Matrix $H(f(\vec{x}_0))$ nützlich.
Sind alle Eigenwerte dieser symmetrischen Matrix positiv (Man sagt dann H ist positiv definit) so besitzt f bei $\vec{x}_0$ ein relatives Minimum
Sind alle negativ (so sagt man H negativ definit) dann besitzt f bei $\vec{x}_0$ ein rel. Maximum.
Hat H sowohl positive als auch negative Eigenwerte (H: indefinit) $\Rightarrow$ $\vec{x}_0$: Sattelpunkt.
Ist mindestens ein Eigenwert $= 0$ $\Rightarrow$ Keine Aussage.

1) Beispiel Lineare Regression.

Zu den Punkten $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$, $n \geq 2$
$x_1 < x_2 < \dots < x_n$
Gerade in bestimmen welche im Quadratischen Mittel die Punkte optimal annähert.

D. h.: Gesuch sind $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$F(a,b) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a x_j - b)^2$$ minimal wird.

Kritische Punkt $\frac{\partial}{\partial a} F(a,b) = -2 \sum_{j=1}^{n} x_j (y_j - a x_j - b) = 0$

$$\wedge \quad \frac{\partial}{\partial b} F(a,b) = -2 \sum_{j=1}^{n} (y_j - a x_j - b) = 0$$

$\Rightarrow$ Lineare Gleichugssystem

$$a \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$a \sum_{j=1}^{n} x_j + n b = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Mit $[xx] = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \quad [x] = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad [x,y] = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

$[y] = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad \Rightarrow$

$$[xx] a + [x] b = [xy]$$

$$[x] a + n b = [y]$$

Wegen $n \geq 2$ ist $D = [xx] n - [x]^2 > 0$

Cramersche Regel

$$a = \frac{1}{D} \left[n [xy] - [x][y] \right]$$

$$b = \frac{1}{D} \left[[y][xx] - [x][xy] \right]$$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial a^2} F = 2 [xx] > 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial b^2} = 2n > 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F = \frac{\partial^2}{\partial b \partial a} F = 2 [x]$$

$\Rightarrow H(a,b) = 4D > 0 \Rightarrow$ Minimum ist

2. Beispiel. Extremwerte von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(\vec{x}) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$. krit. Punkte $f_x(\vec{x}) = 0 \wedge f_y(\vec{x}) = 0$

$$f_x = \frac{1+x^2-2x^2+2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+2xy+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-1-x^2-y^2+2y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$f_x = 0 \Leftrightarrow$ I $1-x^2+2xy+y^2=0$ $f_y = 0 \Leftrightarrow$ II $1+x^2-y^2+2xy=0$

I − II $\Rightarrow x^2-y^2=0$, also $y=x \vee y=-x$

Für $y=x$ folgt aus I $1+2x^2=0$ also keine Lösung

Für $y=-x \Rightarrow 1-2x^2=0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit erhält man die kritischen Punkte

$(x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ und $(x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

Man könnte nun die Hesse-Matrix befragen, aber das wäre zwar elementare aber etwas umfangreichere Rechnung.

Einfacher ist: f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig und wenn (x,y) in einer oder beiden Variablen unbeschränkt wächst geht $f(x,y)$ gegen 0. Da f sowohl positive als auch negative Werte annimmt, muß f daher sowohl ein Maximum als auch ein Minimum in $\mathbb{R}^2$ besitzen. Diese müssen in den kritischen Punkten liegen. Damit ist

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5} > 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{5} < 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$