Da man nur die Vorzeichen der Eigenwerte benötigt, und die Determinante einer Matrix gleich dem Produkt der Eigenwerte ist und da f bei einer kritischen Stelle $\vec{x}_0$ genau dann ein relatives Maximum oder Minimum bei $\vec{x}_0$ besitzt, wenn dies auch gilt, wenn man f nur als Funktion der ersten ν ($\nu = 1, \dots, n$) Variablen betrachtet, geht man folgendermaßen vor:

1. Schritt: Berechnung der Determinante von $H(\vec{x}_0)$
   Ist $D = \det H(\vec{x}_0) = 0$, so ist mindestens ein Eigenwert 0 und damit keine Aussage möglich.
   Ist n gerade und $D < 0 \Rightarrow \vec{x}_0$ Sattelpunkt.
2. Wenn keiner der obigen Fälle vorliegt, dann berechnet man zu $H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \\ h_{n1} & \cdots & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} = D = a_n$, die Unterdeterminanten:
   $a_1 = h_{11}$ $\quad a_2 = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ $\quad a_3 = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \dots$
   bis $a_{n-1} = \det \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1,n-1} \\ & & \\ h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$

dann gilt:

f besitzt bei $\vec{x}_0$ genau dann ein Minimum, wenn alle a_j, $j = 1, \dots, n$ positiv sind.

f besitzt bei $\vec{x}_0$ genau dann ein Maximum, wenn alle $a_{2j+1} < 0$ und $a_{2j+2} > 0$ sind, $j = 0, 1, 2, \dots$

Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bedeutet dies:

Ist $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ ein kritischer Punkt $H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$

dann gilt: a) Ist $\det H(\vec{x}_0) < 0 \Rightarrow \vec{x}_0$ Sattelpunkt

b) Ist $\det H(\vec{x}_0) > 0$, dann ist $\vec{x}_0$ ein Extrempunkt und zwar ist f minimal, wenn $h_{11} > 0$, maximal wenn $h_{11} < 0$.

c) Ist $\det H(\vec{x}_0) = 0$, so keine Aussage.

Beispiel 3: Extremwerte von $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f: (x,y,z) \to 2x^2 + y^2 + z^2 - xz + yz = f(x,y,z)$

Kritische Punkte: $f_x = 4x - z = 0 \wedge f_y = 2y + z = 0$

$\wedge\ f_z = 2z - x + y = 0 \Rightarrow z = 4x = -2y \wedge 2z = y - x \Rightarrow z = x = y = 0$

$\Rightarrow y = -2x$

$\Rightarrow$ einziger kritischer Punkt: $\vec{x}_0 = (0,0,0)$.

Hesse-Matrix $f_{xx} = 4$ $f_{xy} = f_{yx} = 0$ $f_{xz} = f_{zx} = -1$

$f_{yy} = 2$ $f_{yz} = f_{zy} = 1$ $f_{zz} = 2$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H = 10 > 0$$

und $a_1 = 4 > 0$ $a_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ $\Rightarrow$ bei $(0,0,0)$ besitzt

f ein Minimum.