Die Lösung der inhomogenen Dgl.

$L(y) = s(x)$ kann dann durch Variation der Konstanten oder aber, bei spezieller Störfunktion $s(x) = P(x)\, e^{\alpha x}\,[a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)]$ wobei P ein Polynom m-ten Grades $m \geq 0$ ist kann, mit Hilfe eines Lösungsansatzes eine partikuläre Lösung y_p bestimmt werden. Hierbei müssen zwei Fälle beachtet werden.

I Wenn $\alpha + i\beta$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung der homogenen Dgl ist, (also $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ keine Lösung der homogenen Dgl ist) macht man den Ansatz:

$$y_p = e^{\alpha x}\,[P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x)]$$

wobei P_1 und P_2 Polynome als Polynome mit unbestimmten Koeffizienten und Grad P_1 = Grad P_2 = Grad P angesetzt werden.

II Ist $\alpha + i\beta$ eine γ-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung, dann fügt man dem obigen Ansatz noch den Faktor x^{γ} hinzu, also

$$y_p = x^{\gamma} e^{\alpha x}\,[P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x)].$$

Dieser Fall wird Resonanzfall genannt.

Bemerkung: Wenn $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$

Man setzt dies in $L(y) = s(x)$ ein und bestimmt durch Koeffizientenvergleich P_1 und P_2.

Bemerkung: Ist $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$ so erhält man y_p zu s als Summe der Ansatzfunktionen zu s_1 und s_2.

Beispiele:

1. Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl. $y''' + y'' - 2y = s(x)$ mit

a) $s(x) = xe^{-x}$ b) $s(x) = 2e^{x}$ c) $s(x) = \cos x$

d) $s(x) = x^2 \cdot - 2e^{x}$

Die homogene Dgl.

$$y''' + y'' - 2y = 0 \qquad \text{(siehe Bsp. 1, S. -4-)}$$

hat die Lösung $y_h = c_1 e^{x} + e^{-x}[c_2 \cos x + c_3 \sin x]$ (Nullstellen der char. Gl. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$)

Die Störfunktionen sind alle „Ansatz-tauglich".

a) $s(x) = xe^{-x} = P(x)\, e^{-1x} \cdot \cos(0x)$ $P(x) = x$

Grad $P = 1$ $\Rightarrow y_p = (\underbrace{d_1 + d_2 x}_{P_1(x)})\, e^{-x}$, da -1 keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist.

$\Rightarrow y_p' = e^{-x}(d_2 - d_1 - d_2 x)$, $y_p'' = e^{-x}[d_2 x + d_1 - 2d_2]$

$y_p''' = e^{-x}[3d_2 - d_1 + d_2 x]$ in

$y''' + y'' - 2y = xe^{-x}$ eingesetzt:

$e^{-x}[3d_2 - d_1 - d_2 x + d_2 x + d_1 - 2d_2 - 2d_1 - 2d_2 x] = xe^{-x}$

$\Rightarrow -2d_2 x + d_2 - 2d_1 = x \Rightarrow -2d_2 = 1 \wedge d_2 - 2d_1 = 0$

$\Rightarrow d_2 = -\frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y_p = -(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x)e^{-x}$

$\Rightarrow y_A = y_h + y_p = c_1 e^{x} + e^{-x}[c_2 \cos x + c_3 \sin x] - \frac{1}{4}(1 + 2x)e^{-x}$

b) $s(x) = 2e^{x} = 2e^{1 \cdot x}\cos(0x)$ Grad $P = 0$ $\alpha = 1$ $\beta = 0$

Da 1 eine einfache Nullstelle der char. Gl. ist, liegt hier „Resonanz" vor.

Ohne Resonanz wäre $y_p = de^{x}$ anzusetzen,

also $y_p = x\, de^{x} \Rightarrow y_p' = d(x+1)e^{x}$

$y_p'' = d(x+2)e^{x}$, $y_p''' = d(x+3)e^{x}$

in $y''' + y'' - 2y = e^x$ eingesetzt ⇒

$d \cdot e^x [x + 3 + x + 2 - 2x] = 2e^x \Rightarrow 5d = 2 \Rightarrow d = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow y_p = \frac{2}{5} x e^x$. $y_A = y_h + y_p$

c) $s(x) = \cos x = 1 \cdot e^{0x} \cos(1x)$. Da
$0 + i = i$ keine Nullst. der char. Gl. ist, liegt
hier kein Resonanzfall vor.

$P(x) = 1$ (also konst.) $\Rightarrow p_1 = d_1$, $p_2 = d_2$ konst

$y_p = d_1 \cos x + d_2 \sin x \Rightarrow y_p' = -d_1 \sin x + d_2 \cos x$

$y_p'' = -d_1 \cos x - d_2 \sin x$, $y_p''' = d_1 \sin x - d_2 \cos x$

in $y''' + y'' - 2y = \cos x$ eingesetzt ergibt

$d_1 \sin x - d_2 \cos x - d_1 \cos x - d_2 \sin x - 2d_1 \cos x - 2d_2 \sin x = \cos x$

$\Rightarrow [-d_2 - 3d_1 - 1] \cos x + [d_1 - 3d_2] \sin x \equiv 0$.

$\Rightarrow d_2 + 3d_1 = -1 \wedge d_1 = 3d_2 \Rightarrow 10 d_2 = -1 \quad d_2 = -\frac{1}{10}$

$d_1 = -\frac{3}{10} \Rightarrow y_p = -\frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$

$y_A = y_h + y_p$

d) $s(x) = x^2 - 2e^x = s_1(x) - s_2(x)$ mit
$s(x) = x^2$ und $s_2(x) = 2e^x$

Da wir für $s_2(x)$ unter b) $y_{p_2} = \frac{2}{5} x e^x$
bestimmt haben brauchen wir nur noch
y_{p_1} zu $s_1(x)$ zu bestimmen.

$s_1(x) = x^2 = x^2 e^{0x} \cos(0x)$ Da $0 + 0i = 0$ keine
Nullstelle der char. Gl. ist, liegt keine
Resonanz vor. Also $y_{p_1} = (d_1 x^2 + d_2 x + d_3) e^{0x} \cos(0x)$

$y_{p_1} = d_1 x^2 + d_2 x + d_3 \quad y_{p_1}' = 2d_1 x + d_2$, $y_p'' = 2d_1$

$y_p''' \equiv 0 \Rightarrow$ (in $y''' + y'' - 2y = x^2$ eingesetzt)

$2d_1 - 2d_1 x^2 - 2d_2 x - 2d_3 = x^2$

$\Rightarrow -2d_1 = 1 \quad d_2 = 0 \quad 2d_1 - 2d_3 = 0$

$\Rightarrow d_1 = -\frac{1}{2} = d_3 \Rightarrow y_{p_1} = -\frac{1}{2}(x^2+1)$

$y_p = y_{p_1} - y_{p_2} = -\frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{2}{5}x e^x$.

$y_A = y_h + y_p$.

2. Beispiel:

$y'' + y = \tan x \qquad I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

1. Lösung der homogenen Dgl.

$y'' + y = 0$, Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ char. Gl. $\lambda^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow y_1 = e^{0x}\cos(1x) = \cos x$,

$y_2 = e^{0x}\sin(1x) = \sin x$ ist ein Fundamentalsystem. $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

zur Störfunktion $s(x) = \tan x$ können wir keinen Ansatz für y_p machen, also müssen wir y_p durch Variation der Konstanten bestimmen

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

Wronski-Matrix $W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det W(x) = w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow c_1'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \tan x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

$c_2'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$

$\Rightarrow c_2(x) = -\cos x$

$$c_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\,dx$$

$= -\int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cos x\,dx \underset{\substack{u = \sin x \\ du = \cos x\,dx}}{=} \int \frac{-u^2}{1-u^2}\,du = \int \frac{1-u^2-1}{1-u^2}\,du$

$= u - \int \frac{1}{1-u^2}\,du$

$= u + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) = u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \overset{u=\sin x}{=} \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\Rightarrow c_1(x) = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\Rightarrow y_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$

$= \left(\sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \cos x - \cos x \sin x$

$\Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \cdot \cos x$

$y_A = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \cdot \cos x$