Homogene LDS mit konstanten Koeffizienten.

Lösungsmuster:

Entkopplung: Nur für kleines n ($= 2, 3$) zu empfehlen

Bsp.: $y_1' = 2y_1 + 9y_2$ (I) $\Rightarrow 9y_2 = y_1' - 2y_1$ (III)

$y_2' = y_1 + 2y_2$ (II)

(I) differenziert $\Rightarrow y_1'' = 2y_1' + 9y_2'$ (II)

$\Rightarrow y_1'' = 2y_1' + 9(y_1 + 2y_2) = 2y_1' + 9y_1 + 2 \cdot 9 y_2 \overset{(III)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow y_1'' = 2y_1' + 9y_1 + 2y_1' - 4y_1 \Rightarrow y_1'' - 4y_1' - 5y_1 = 0$

Ansatz $y_1 = e^{\lambda x} \Rightarrow$ Char. Gl. $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 5 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}$

$y_2 = \frac{1}{9}(y_1' - 2y_1) = \frac{1}{9}(-c_1 e^{-x} + 5c_2 e^{5x} - 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{5x})$

$y_2 = -\frac{1}{3} c_1 e^{-x} + \frac{1}{3} c_2 e^{5x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Eigenwertmethode:

$\vec{y}' = A\vec{y}$ Ansatz $\vec{y} = \vec{a} e^{\lambda x} \Rightarrow$ Eigenwertaufgabe

$A\vec{a} = \lambda \vec{a}$ Berechnung der Eigenwerte durch

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Berechnung der Eigenvektoren (Räume) zu λ_j durch Lösen des homogenen Linearen GLS

$(A - \lambda_j E)\vec{a} = \vec{0}$ zu den Eigenwerten λ_j

Erhält man zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, so bilden $\vec{y}_1 = \vec{a}_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, \vec{y}_n = \vec{a}_n e^{\lambda_n x}$ ein Fundamentalsystem

Ist allerdings λ_j ein k-facher Eigenwert, so ist es möglich, dass zu λ_j weniger als

k linear unabhängige Eigenvektoren gehören, dann benötigt man die sogenannten Hauptvektoren siehe Skript.
Wir wollen diesen Fall, der in der Regel aufwändig ist hier nicht umfassend behandel.
Hat die Matrix A komplexe Eigenwerte

$\lambda = \alpha + i\beta$, so sind auch (Da A reell) $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ Eigenwerte, und dann sind auch die Eigenvektoren $\vec{a}$ zu λ komplex und dann gilt
$\overline{\vec{a}}$ ist Eigenvektor zu $\bar{\lambda}$, so dass man die komplexen Lösungen

$$\vec{Y}_1 = \vec{a} e^{\lambda x} = \vec{a}\, e^{(\alpha + i\beta)x} = \vec{a}\, e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

$$Y_2 = \overline{\vec{a}}\, e^{(\alpha - i\beta)x} = \overline{\vec{a}}\, e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

erhält $\Rightarrow$ $\vec{Y}_1 = \mathrm{Re}(\vec{Y}_1)$ und $\vec{Y}_2 = \mathrm{Im}(\vec{Y}_1)$

sind reelle Lösungen zum Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$.

Beispiele:

1) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$ d.h. $y_1' = 2y_1 + 9y_2$
$y_2' = y_1 + 2y_2$

Ansatz $\vec{y} = \vec{a}\, e^{\lambda x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{a} = \lambda \vec{a}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 9 \Rightarrow \lambda - 2 = \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$

Eigenvektoren (Räume) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu lösen

$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -1$ $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = t$
$a_1 = -3t$ $\{\vec{a}\} = \{t(-3, 1)\}$

$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$

$\lambda_2 = 5$ $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 - 3a_2 = 0$ $a_2 = t$, $a_1 = 3t$

$\Rightarrow \vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$ $\Rightarrow \vec{Y}_h = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$.

2. Bsp.: $y_1' = y_1 - 2y_2$
$y_2' = 2y_1 + y_2$ $\Rightarrow \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$.

Ansatz $\vec{y} = \vec{a}\, e^{\lambda x}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 = -4 \Rightarrow \lambda - 1 = \pm 2i \quad \lambda_1 = 1 + 2i \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - 2i$

Eigenvektoren

$\lambda_1 = 1 + 2i \qquad (A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow i a_1 + a_2 = 0 \qquad a_1 = t \Rightarrow a_2 = -it$

$\vec{a} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 - 2i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i a_1 - a_2 = 0 \quad a_1 = t$
$\Rightarrow a_2 = it$

$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}} \Rightarrow$ komplexe

Lösungen $\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1-2i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{x} e^{-2ix}$

$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{x} (\cos(2x) - i \sin(2x))$

$\vec{Y}_2 = \overline{\vec{Y}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{x} (\cos(2x) + i \sin(2x))$

$\vec{y}_1 = \mathrm{Re}\, \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \end{pmatrix} e^{x}, \ \vec{y}_2 = -\mathrm{Im}\, \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} +\sin(2x) \\ +\cos(2x) \end{pmatrix} e^{x}$

bilden ein reelles Fundamentalsystem

$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \\ c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) \end{pmatrix} e^{x}$

3. Bsp:

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 9 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

A ist symmetrisch!

Also besitzt A nur reelle Eigenwerte und 3 linear unabhängige Eigenvektoren

Eigenwerte

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 4 \\ -3 & 9-\lambda & -3 \\ 4 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 4 \\ -3 & 9-\lambda & -3 \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 6-\lambda \\ -3 & 9-\lambda & -6 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 15\lambda - 36) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 12$$

Eigenvektoren (Räume)

$\lambda_1 = -2 \qquad (A + 2E)\vec{a} = \vec{0} \qquad$ Gauß-Schema: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{matrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & 11 & -3 \\ 4 & -3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow a_2 = 0, \; a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow \vec{a}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\left.\begin{matrix} -1 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 4a_3 - 3a_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 12$

$$\left.\begin{matrix} -10 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & -3 \\ 4 & -3 & -10 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} -7 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{a}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{12x}$$

bilden ein Fundamentalsystem

$$\vec{y}_h = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{12x}$$