# Mathematik I
# für
# Maschinenbau- und
# Wirtschaftsingenieure

**Dr. D. Wrase**[1)]

**Vorlesungsskriptum**
**im SS 1997**

**Universität – GH – Siegen**

[1)]Fehlermeldungen bitte an `schueler@gmx.de`. Eine aktuelle Version dieses Skripts befindet sich unter `http://www.informatik.uni-siegen.de/~schueler/mathe.htm`. Die vorliegende Version wurde am 26. September 2001 erstellt.

# Inhaltsverzeichnis


**1 Grundlagen** **1**

1.1 Mengen . . . . . . . . . . 1

1.2 Reelle Zahlen . . . . . . . . . . 3

1.3 Ungleichung, Betrag . . . . . . . . . . 4

1.3.1 Betrag einer reellen Zahl . . . . . . . . . . 5

1.4 Beweismethoden . . . . . . . . . . 6

1.4.1 Direkter Beweis . . . . . . . . . . 7

1.4.2 Indirekter Beweis . . . . . . . . . . 7

1.4.3 Beweis durch vollständige Induktion . . . . . . . . . . 8

1.5 Geometrische Summe, Binomische Formel . . . . . . . . . . 9

**2 Räumliche Vektorrechung** **13**

2.1 Geometrische Definitionen . . . . . . . . . . 13

2.2 Koordinatendarstellung von Vektoren . . . . . . . . . . 21

2.2.1 Rechenoperationen für Vektoren in Koordinatendarstellung: . . 23

2.2.2 Mehrfache Produkte . . . . . . . . . . 24

2.3 Geometrische Anwendungen der Vektorrechnung . . . . . . . . . . 26

2.3.1 Geraden und Ebenen im Raum . . . . . . . . . . 26

2.4 Komplexe Zahlen (Teil I) . . . . . . . . . . 32

**3 Funktionen** **35**

3.1 Zahlenmengen und Folgen in $\mathbb{R}$ . . . . . . . . . . 35

3.2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen . . . . . . . . . . 39

3.3 Die elementaren Funktionen . . . . . 41
3.3.1 Polynome (ganzrationale Funktionen) . . . . . 41
3.3.2 Rationale Funktionen . . . . . 43
3.3.3 Natürliche Exponentialfunktion . . . . . 43
3.3.4 Hyperbelfunktionen . . . . . 45
3.3.5 Trigonometrische Funktionen . . . . . 45
3.4 Umkehrfunktionen . . . . . 47
3.5 Umkehrfunktionen der elementaren Funktionen . . . . . 49
3.5.1 Wurzelfunktionen . . . . . 49
3.5.2 Logarithmus, allgemeine Potenz . . . . . 49
3.5.3 Areafunktionen . . . . . 50
3.5.4 Arkusfunktionen . . . . . 51

**4 Differentialrechnung 52**
4.1 Ableitungsregeln . . . . . 53
4.2 Ableitung einer Umkehrfunktion . . . . . 54
4.3 Ableitungen der elementaren Funktionen . . . . . 54
4.3.1 Konstante Funktion . . . . . 54
4.3.2 Polynome . . . . . 54
4.3.3 Exponentialfunktion . . . . . 54
4.3.4 Hyperbelfunktionen . . . . . 55
4.3.5 Trigonometrische Funktionen . . . . . 55
4.3.6 Natürlicher Logarithmus, allgemeine Potenz, Wurzelfunktionen 55
4.3.7 Areafunktionen . . . . . 56
4.3.8 Arkusfunktionen . . . . . 56
4.3.9 Tabelle der Ableitungen der elementaren Funktionen . . . . . 57
4.4 Sätze über differenzierbare Funktionen . . . . . 57
4.5 Anwendungen . . . . . 59
4.5.1 Kurvenverlauf . . . . . 59
4.5.2 Relative Extremwerte . . . . . 60
4.5.3 Regel von DE L'HOSPITAL . . . . . 61

4.5.4 Schnittwinkel zwischen Kurven . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
4.5.5 Einfache Iteration und Newton-Verfahren . . . . . . . . . . . . 63

**5 Integralrechnung 66**
5.1 Riemannsummen, bestimmtes Integral . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
5.2 Spezielle Substitutionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
5.3 Integration rationaler Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
5.4 Weitere spezielle Integrale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
5.5 Einige Anwendungen der Integralrechnung . . . . . . . . . . . . . . . 77
5.5.1 Flächenberechnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
5.5.2 Flächenschwerpunkt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
5.5.3 Länge eines durch $y = f(x)$ gegebenen Bogens . . . . . . . . . 78
5.5.4 Rotationskörper . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
5.5.5 Schwerpunkt eines Bogens . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
5.5.6 Mittelwert einer Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
5.6 Mittelwertsätze, Taylorformel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
5.7 Uneigentliche Integrale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
5.8 Numerische Integration . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
5.8.1 Trapezformel, Rombergverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
5.8.2 Simpsonformel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

**6 Unendliche Reihen 89**
6.1 Zahlenreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
6.2 Einige Konvergenzkriterien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
6.3 Alternierende Reihen, Leibnizkriterium . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
6.4 Funktionenreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
6.5 Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
6.5.1 Eigenschaften von Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
6.5.2 Rechenregeln für Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
6.6 Taylorreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
6.7 Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen . . . . . . . . . . . 102

6.7.1 $f(x) = e^x$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
6.7.2 $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
6.7.3 $f(x) = \sin x$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
6.7.4 Binomische Reihe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
6.7.5 Arkus- und Areafunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106
6.8 Einige Anwendungen von Reihenentwicklungen . . . . . . . . . . . . . 109
6.8.1 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten . . . . . . . 109
6.8.2 Berechnung von Integralen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
6.8.3 Näherungslösungen von Differentialgleichungen . . . . . . . . . 112
6.8.4 Berechnung von Grenzwerten . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
6.9 Potenzreihen in $\mathbb{C}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

**7 Komplexe Zahlen (Teil II) 115**

7.1 Eulersche Darstellung komplexer Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . 115

**8 Lineare Algebra 119**

8.1 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus . . . . . . . . . . 119
8.2 Der $n$-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . 124
8.3 Matrizen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
8.3.1 Rechenoperationen für Matrizen . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
8.4 Determinanten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
8.5 Inverse Matrix . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136
8.6 Lineare Gleichungssysteme, Cramersche Regel . . . . . . . . . . . . 140
8.7 Eigenwertprobleme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 144
8.8 Koordinatentransformation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149
8.9 Ebene Koordinatentransformation . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151
8.10 Ebene Kegelschnitte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152
8.10.1 Normalformen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152

# Abbildungsverzeichnis

1.1 Reelle Zahlengerade . . . 4

2.1 Vektor . . . 13
2.2 Vektoraddition . . . 14
2.3 Kommutativgesetz der Vektoraddition . . . 14
2.4 Assoziativgesetz der Vektoraddition . . . 15
2.5 Skalarprodukt . . . 17
2.6 Eigenschaften des Skalarprodukts . . . 18
2.7 Kosinussatz . . . 18
2.8 Rechtssystem . . . 19
2.9 Vektorprodukt . . . 20
2.10 Vektorprodukt — Mehrdeutigkeit . . . 20
2.11 Vektorprodukt — Eigenschaft (V3) . . . 21
2.12 Darstellung eines Vektors . . . 22
2.13 Spatprodukt . . . 25
2.14 Parameterform der Geradengleichung . . . 27
2.15 Parameterdarstellung einer Ebene . . . 28
2.16 Abstand eines Punktes . . . 30
2.17 Gaußsche Zahlenebene . . . 33

3.1 Schaubild einer Funktion . . . 40
3.2 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis . . . 46
3.3 Sinus und Kosinus . . . 46
3.4 Abschätzung für den Sinus . . . 47

3.5 Umkehrfunktion . . . . . 48

4.1 Tangente an eine Funktion . . . . . 53
4.2 Konvexe Funktion . . . . . 60
4.3 Schnittwinkel zwischen Kurven . . . . . 63
4.4 Einfache Iteration . . . . . 64
4.5 Newtonverfahren . . . . . 65

5.1 Riemannsumme . . . . . 67
5.2 Flächeninhalt . . . . . 77
5.3 Trapezformel . . . . . 83
5.4 Simpsonformel . . . . . 87

7.1 Komplexe Zahl . . . . . 115

8.1 Koordinatentransformation . . . . . 151
8.2 Ellipse . . . . . 153
8.3 Hyperbel . . . . . 153
8.4 Parabel . . . . . 154

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Mengen

**Definition 1.1** *Eine* Menge $M$ *ist eine Ansammlung von wohlunterscheidbaren Objekten, (den* Elementen *der Menge), welche durch eine Umfangsaussage zusammengefaßt werden.*

| | |
|---|---|
| *Schreibweise:* | $M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft} \ldots\}$ |
| *Beispiel:* | $M = \{x \mid x \text{ ist Buchstabe des lateinischen Alphabets}\}$ |

$x \in M$ *bedeutet:* $x$ *ist Element der Menge* $M$.
$x \notin M$ *bedeutet:* $x$ *ist kein Element der Menge* $M$.

**Definition 1.2** *Sind* $M_1$ *und* $M_2$ *zwei Mengen, so bedeutet*

1. $M_1 \subset M_2$ *(*$M_1$ *ist in* $M_2$ enthalten*): Für jedes* $x \in M_1$ *gilt* $x \in M_2$.
   $M_1$ *wird dann* Teilmenge *von* $M_2$ *genannt.*
2. $M_1 = M_2$ *(*$M_2$ *ist* identisch *mit* $M_2$*): Es ist sowohl* $M_1 \subset M_2$ *als auch* $M_2 \subset M_1$.
3. $M_1 \not\subset M_2$*:* $M_1$ *ist nicht in* $M_2$ *enthalten, d. h. es gibt (mindestens) ein Element* $x \in M_1$ *mit* $x \notin M_2$.

*Aus formalen Gründen wird die leere Menge* $\emptyset$ *eingeführt.* $\emptyset$ *enthält kein Element.*

Um den schreibtechnischen Aufwand zu verringern, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

**Definition 1.3** *Sind* $A$ *und* $B$ *Aussagen, so schreibt man*

1. $A \wedge B$ *für: „Sowohl* $A$ *als auch* $B$*“ (*$A$ *und* $B$*)*
2. $A \vee B$ *für: „*$A$ *oder* $B$ *(oder beides)“*
3. $A \Longrightarrow B$ *für: „Aus* $A$ *folgt* $B$*“*
4. $A \iff B$ *für: „*$A$ *äquivalent zu* $B$*“:* $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$.

**Definition 1.4** *Sind* $M_1$, $M_2$ *Mengen, so bedeutet*

1. $M_1 \cup M_2 := \{x | x \in M_1 \vee x \in M_2\}$ *die* Vereinigung *von* $M_1$ *und* $M_2$.
2. $M_1 \cap M_2 := \{x | x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$ *der* Durchschnitt *von* $M_1$ *und* $M_2$.
3. $M_1 \setminus M_2 := \{x | x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$ *die* Differenz *von* $M_1$ *und* $M_2$.

*Häufig sind eine sogenannte Obermenge* $\Omega$ *und Teilmengen* $A, B, C, \ldots \subset \Omega$ *gegeben. Dann bedeutet* $A^C = A^C(\Omega) := \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\} = \Omega \setminus A$ *das* Komplement *von a bezüglich der Menge* $\Omega$.

**Definition 1.5** *Sind* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *Mengen, so bedeutet*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots,$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots.$$

**Satz 1.6** *Für die Mengenoperationen* $\cup$, $\cap$ *gilt:*

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cap B = B \cap A$,
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Wenn Klammern fortgelassen werden, so geht $\cap$ vor $\cup$, d. h.

$$A \cup B \cap C := A \cup (B \cap C),$$

$$A \cap B \cup C \cap D := (A \cap B) \cup (C \cap D).$$

## 1.2 Reelle Zahlen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Zahlenmengen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{x|x = 1, 2, 3, \ldots\} : \text{Menge der } \textit{natürlichen Zahlen}, \\
\mathbb{Z} &:= \{x|x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} : \text{Menge der } \textit{ganzen Zahlen}, \\
\mathbb{Q} &:= \{x|x = p/q,\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ p/q = p_1/q_1 \text{ genau dann, wenn} \\
&\quad\ p \cdot q_1 = p \cdot p_1\} : \text{Menge der } \textit{rationalen Zahlen}.
\end{aligned}$$

Versehen mit den Grundrechenarten $+, \cdot$ bildet die Menge der rationalen Zahlen bekanntlich einen Körper.

Jedes $x \in \mathbb{Q}$ kann durch einen endlichen oder periodischen unendlichen Dezimalbruch dargestellt werden.

**Beispiel 1.7** $1/16 = 0,0625; \quad 1/13 = 0,\overline{076923}$ □

Umgekehrt ist jeder endliche oder unendlich periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl.

Allerdings treten auch Zahlen auf, die nicht rational sind, z. B. die Länge einer Diagonalen in einem Quadrat mit rationaler Seitenlänge oder der Umfang eines Kreises mit rationalem Radius.

Insofern ist es nötig, diese Menge der rationalen Zahlen zur Menge der *reellen Zahlen* zu „vervollständigen“.

Wir definieren zunächst die Menge der reellen Zahlen als die Menge aller rechts vom Komma beliebig langen Dezimalzahlen und bezeichnen diese Menge mit $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} := \{x|x \text{ ist eine rechts vom Komma beliebig lange Dezimalzahl}\}$$

Die Menge der reellen Zahlen veranschaulichen wir auf einer Zahlengeraden (Abb. 1.1).

Dazu werden die Punkte 0 und 1 festgelegt, die reellen Zahlen werden dann maßstabsgetreu auf der Geraden abgetragen. Rechts von der Null die positiven, links die negativen Zahlen.

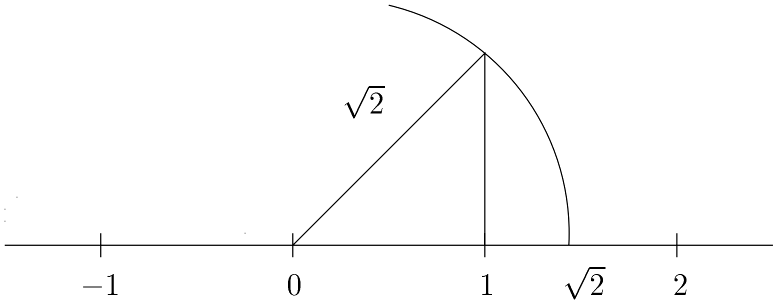


Abbildung 1.1: Reelle Zahlengerade

## 1.3 Ungleichung, Betrag

Eine beliebige reelle Zahl $a$ erfüllt genau eine der drei Möglichkeiten

$$a = 0 \vee a \text{ positiv } \vee a \text{ negativ.}$$

Ist $a$ negativ, so schreibt man $a < 0$ ($a$ kleiner als Null),
$a$ positiv, so schreibt man $a > 0$ ($a$ größer als Null).

**Definition 1.8** *Für $a, b \in \mathbb{R}$ sagt man*

1. $a < b$ *(a* kleiner als *b) genau dann, wenn* $b - a > 0$,
2. $a > b$ *(a* größer als *b) genau dann, wenn* $a - b > 0$,
3. $a \leq b$ *(a* kleiner oder gleich *b):* $(a < b) \vee (a = b)$,
4. $a \geq b$ *(a* größer oder gleich *b):* $(a > b) \vee (a = b)$.

**Satz 1.9** *Es gilt*

*(1)* $a < b,\ b < c \Longrightarrow a < c$,
*(2)* $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$,
*(3)* $a < b,\ c > 0 \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$,
*(4)* $a < b,\ c < 0 \Longrightarrow a \cdot c > b \cdot c$,
*(5)* $0 \leq a < b \Longrightarrow \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$.

*Analoges gilt, wenn $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.*

### 1.3.1 Betrag einer reellen Zahl

Wenn wir die reellen Zahlen durch Punkte auf der Zahlengeraden darstellen, so ist der Abstand einer reellen Zahl $a$ zum Nullpunkt gleich dem Abstand von $-a$ zum Nullpunkt; diesen „Abstand“ nennen wir den *Betrag* von $a$.

**Definition 1.10 (Betrag)**

$$|a| := \begin{cases} a, & \textit{wenn } a \geq 0, \\ -a, & \textit{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Damit gilt: $|a| \geq 0,\ |a| = 0 \iff a = 0.$

**Satz 1.11** *Weitere Eigenschaften des Betrages:*

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
2. $b \neq 0 \Longrightarrow |a/b| = |a|/|b|$,
3. $||a| - |b|| \leq \underbrace{|a + b| \leq |a| + |b|}_{\text{Dreiecksungleichung}}$

**Beispiel 1.12** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche jeweils die folgende Ungleichung erfüllen:

1. $1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 2$,

   Zunächst ist $x = 0$ auszuschließen: $x \neq 0$.

   $$1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 2 \iff 1 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq 2 \iff 0 \leq 1/x \leq 1.$$

   Da für $x < 0$ auch $\frac{1}{x} < 0$ ist, kann die linke Ungleichung für $x < 0$ nicht erfüllt werden. Für $x > 0$ erhält man

   $$0 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \iff 0 \cdot x \leq 1/x \cdot x \leq 1 \cdot x \iff 0 \leq 1 \leq x,$$

   also erhält man: Die Ungleichung ist für alle $x \geq 1$ erfüllt.

2. $\left|\frac{x+4}{x+1}\right| < 2$. $x \neq -1$. Es ist

$$\left|\frac{x+4}{x+1}\right| = \frac{|x+4|}{|x+1|}.$$

Da $|x+1| > 0$ ist, darf die Ungleichung $\frac{|x+4|}{|x+1|} < 2$ mit $|x+1|$ multipliziert werden, also wird die Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $|x+4| < 2|x+1|$.

Fallunterscheidungen:

(a) $x < -4 \Longrightarrow |x+4| = -(x+4),\ |x+1| = -(x+1),\ -x-4 < -2x-2 \iff x < 2$; Lösungsmenge $L_1 = \{x|x < -4\}$.

(b) $-4 \leq x < -1 \Longrightarrow |x+4| = x+4,\ |x+1| = -(x+1),\ x+4 < -2x-2 \iff 3x < -6 \iff x < -2$; Lösungsmenge $L_2 = \{x| -4 \leq x < -2\}$.

(c) $x \geq -1 \Longrightarrow |x+4| = x+4,\ |x+1| = x+1,\ x+4 < 2x+2 \Longrightarrow 2 < x$; Lösungsmenge $L_3 = \{x|x > 2\}$.

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x|\ |x| > 2\}$.

□

Es wird nun gezeigt: $a^2 < b^2 \iff |a| < |b|$.

1. Ist $|a| < |b| \Longrightarrow |a|^2 < |b| \cdot |a|$ und $|a| \cdot |b| < |b|^2 \Longrightarrow |a|^2 < |b|^2 \Longrightarrow a^2 < b^2$.
2. Gäbe es ein Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 < b^2$ und $|a| \geq |b|$, dann folgt in der gleichen Schlußweise wie unter 1, daß für dieses Zahlenpaar sowohl $a^2 < b^2$ als auch $a^2 \geq b^2$ gelten müßte. Diese Aussagen widersprechen einander. Damit kann es keine $a, b$ geben, mit $a^2 < b^2$ und $|a| \geq |b|$. Also gilt $a^2 < b^2 \Longrightarrow |a| < |b|$.

Sind nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta > 0$, so gilt

$$\alpha \geq \beta \iff \sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\beta} \qquad (\alpha = \beta \iff \sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden, denn gilt $\alpha > \beta > 0$, so setze man $a = \sqrt{\alpha},\ b = \sqrt{\beta}$. Ist $\alpha = \beta$, so ist auch $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$ und umgekehrt.

## 1.4 Beweismethoden

Zum Schluß des letzten Abschnitts wurde gezeigt, daß zwei Aussagen äquivalent sind. Dabei wurden zwei Schlußweisen benutzt, die hier näher erläutert werden sollen.

### 1.4.1 Direkter Beweis

Zum Beweis der Aussage $A$ geht man hierbei von einer wahren Aussage $B$ aus und gelangt durch logisch einwandfreie Schlußfolgerungen zur Aussage $A$.

**Beispiel 1.13** Behauptung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{a \cdot b}$$

(Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel).

Beweis: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad | + 4ab \\
&\Longrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\
&\Longrightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab \quad |\sqrt{\phantom{x}} \\
&\Longrightarrow \quad |a+b| \geq \sqrt{4ab} \quad | \; a+b > 0 \\
&\Longrightarrow \quad a+b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}
\end{aligned}$$

□

### 1.4.2 Indirekter Beweis

Hierbei benutzt man, daß die mathematische Logik zweiwertig ist, d. h. eine Aussage kann nur wahr oder falsch sein. Ist die Aussage $A$ zu beweisen, so kann man von der Annahme ausgehen, daß $A$ falsch wäre. Gelangt man dann durch logisch einwandfreie Schlüsse zu einer falschen Aussage $B$, so ist die Annahme, daß $A$ falsch ist, nicht wahr, also gilt die Aussage $A$.

**Beispiel 1.14** Behauptung: Ist $a > 0$, so gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Beweis (indirekt): Angenommen, es existiere ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a + \frac{1}{a} < 2$, dann folgt $a^2 + 1 < 2a \Longrightarrow a^2 - 2a + 1 < 0 \Longrightarrow (a-1)^2 < 0$. Die letzte Aussage ist falsch, da für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(a-1)^2 \geq 0$. Also ist die Behauptung richtig. □

### 1.4.3 Beweis durch vollständige Induktion

Des öfteren ist eine zu beweisende Aussage $A = A_n$ von einem Laufindex $n \in \mathbb{N}$ abhängig, dann benutzt man häufig folgende Beweisanordnung:

**1.Schritt:** Induktionsanfang: Man zeigt, daß $A_n$ für $n = 1$ gilt.

**2.Schritt:** Induktionsannahme: Man setzt voraus, daß $A_n$ für *ein* $n \geq 1$ wahr ist (bzw. $A_k$ für alle $k \leq n$ für *ein* $n \geq 1$ wahr ist).

**3.Schritt:** Induktionsschluß: Mit Hilfe der Annahme, daß $A_n$ für ein $n \geq 1$ gilt, zeigt man, daß $A_{n+1}$ wahr ist. Ist dies gelungen, so gilt die Aussage $A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Ist die Aussage $A_n$ für $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$ zu beweisen ($n_0$ eine ganze feste Zahl), so zeigt eine einfache Umnumerierung ($n_0 \leftrightarrow 1, n_0 + 1 \leftrightarrow 2, \ldots, n_0 + k \leftrightarrow k + 1, \ldots$), daß das Beweisverfahren auch für diesen Fall anwendbar ist.

**Beispiel 1.15** Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1 = 1^2$.
2. Induktionsannahme: Für ein $n \geq 1$ gelte $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$
3. Induktionsschluß: $(n \to n + 1)$ Es ist

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 \\ & \quad = \quad (1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) + 2n + 1 \\ & \quad \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} \quad n^2 + 2n + 1 \\ & \quad = \quad (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Damit gilt $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

**Beispiel 1.16 (Bernoullische Ungleichung)**
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis induktiv:

1. ($n = 1$:) $(1+x)^1 = 1 + x \cdot 1 \Longrightarrow (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$.
2. Es gelte für ein $n \geq 1$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. ($n \to n+1$:) Aus $(1+x)^n \geq 1 + nx$ und $1 + x \geq 0$ folgt $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$. Aus $nx^2 \geq 0$ folgt $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \Longrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

Also gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$. □

## 1.5 Geometrische Summe, Binomische Formel

**Definition 1.17** *Für die Summe der Zahlen* $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ $(m \leq n)$ *setzt man*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$k$ *heißt* Laufindex, $m$ untere Grenze, $n$ obere Grenze.

*Analog definiert man das Produkt*

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n.$$

**Beispiel 1.18** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$,

$1 - 4 + 9 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2$,

$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})$. □

Eine der wichtigsten Summen ist die *Geometrische Summe*

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k, \quad q \in \mathbb{R}, q \neq 0.$$

Für $q = 1$ erhält man $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$.

Ist $q \neq 1$, so ist

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n,$$

$$q \cdot S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$$

$\Longrightarrow (1-q)S_n(q) = 1 - q^{n+1}$, also erhält man

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1, q \neq 0.$$

Damit diese Formel auch für $q = 0$ gültig ist (was manchmal in den Anwendungen benötigt wird), definiert man hier $0^0 := 1$

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so nennt man $a + b$ ein *Binom*, und es ist häufig nützlich, die Summe zu kennen, welche beim Ausmultiplizieren der Potenz $(a+b)^n$ entsteht. Man erkennt sofort, daß diese Summe über die Produkte $a^{n-k} \cdot b^k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ zu bilden ist:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\, a^{n-k}\, b^k.$$

Im folgenden wollen wir die *Binomialkoeffizienten* $A_{n,k}$ bestimmen. Zunächst erkennt man sofort, daß $A_{n,0} = 1$ und $A_{n,n} = 1$ gilt, da $a^n$ und $b^n$ beim Ausmultiplizieren genau einmal auftreten.

Für $n = 1$ ist $(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$, also

$$A_{1,0} = 1, \quad A_{1,1} = 1.$$

Um auch die Binomialkoeffizienten $A_{n,k},\ k = 1, 2, \ldots, n-1$, zu berechnen, stellen wir zunächst eine Beziehung zwischen $A_{n,k}$ und $A_{n+1,k}$ her. Es ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} A_{n+1,k}\, a^{n+1-k}\, b^k \\
&= (a+b)^n (a+b) \\
&= (\sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\, a^{n-k}\, b^k)(a+b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\, a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\, a^{n-k}\, b^{k+1} \\ &= A_{n,0}\, a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} (A_{n,k} + A_{n,k-1}) \cdot a^{n+1-k}\, b^k + A_{n,n}\, a^0\, b^{n+1}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_{n+1,k} = A_{n,k} + A_{n,k-1} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Zusammenfassend erhält man: $A_{n,0} = A_{n,n} = 1$ und $A_{n+1,k} = A_{n,k} + A_{n,k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Dies führt zum Pascalschen Dreieck

$$\begin{array}{lccccccccc} n=1 & & & & A_{1,0} & & A_{1,1} & & & \\ n=2 & & & A_{2,0} & & A_{2,1} & & A_{2,2} & & \\ n=3 & & A_{3,0} & & A_{3,1} & & A_{3,2} & & A_{3,3} & \\ n=4 & A_{4,0} & & A_{4,1} & & A_{4,2} & & A_{4,3} & & A_{4,4} \end{array}$$

Jeder Koeffizient dieses Schemas ist wegen (1.1) die Summe der beiden schräg über ihm stehende Koeffizienten der vorhergehenden Zeile. An den Rändern links und rechts steht jeweils eine 1.

Mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks könnte man die Binomialkoeffizienten für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen, allerdings wäre dies für große $n$ sehr aufwendig. Zudem wäre es sehr nützlich, eine allgemeine Formel für die Binomialkoeffizienten zu finden. Dazu wird zunächst definiert:

**Definition 1.19 (Fakultät)** *Für $n \in \mathbb{N}$*

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n \ \textit{(lies: n-Fakultät)},\ 0! := 1.$$

**Definition 1.20 (Binomialkoeffizienten)** *Für $n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n$*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!} \ \textit{(lies: n über k)}$$

Wir zeigen nun: $\binom{n}{k} = A_{n,k}$.
Zunächst ist

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = A_{n,0},$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 = A_{n,n}.$$

Außerdem gilt für $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}(n+1-k+k) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Damit ist $\binom{n}{k} = A_{n,k}$ und man erhält die *Binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Setzt man $a = b = 1$, so folgt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Mit $a = 1,\ b = -1$ folgt

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

# Kapitel 2

# Räumliche Vektorrechung

## 2.1 Geometrische Definitionen

In den Naturwissenschaften und in der Technik gibt es sogenannte skalare Größen (z. B. Temperatur, Länge, Masse, Energie, Widerstand, Kapazität usw.), welche durch eine Maßzahl bestimmt sind, aber auch Größen, welche erst durch die zusätzliche Angabe ihrer „Wirkrichtung“ festgelegt werden (z. B. Kraft, Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls usw.). Letztere stellt man zweckmäßig durch eine gerichtete Strecke dar ($AB$: vom Anfangspunkt $A$ zum Endpunkt $B$). Da häufig nur die Maßzahl (Länge der Strecke) und die Wirkrichtung der gerichteten Größe von Interesse sind, definiert man:

**Definition 2.1** *Alle im 3-dimensionalen Anschauungsraum gegebenen gerichteten Strecken, welche durch Parallelverschiebung ineinander überführt werden können, stellen den gleichen* Vektor *dar. (Abb. 2.1)*

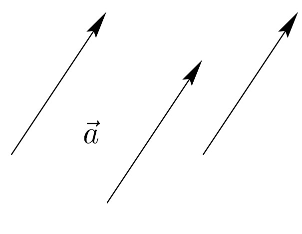


Abbildung 2.1: Vektor

*Vektoren bezeichnen wir durch:* $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$. *Eine gerichtete Strecke wird eine* Darstellung (Repräsentant) *des Vektors genannt. Die Länge der gerichteten Strecke wird der* Betrag des Vektors *genannt und durch* $|\vec{a}|$ *bezeichnet.*

*Aus formalen Gründen wird der* Nullvektor $\vec{0}$ *eingeführt. Dieser besitzt keine Richtung und es ist* $|\vec{0}| = 0$ *(zum Punkt ausgearteter Vektor).*

Aus zwei Kräften $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ erhält man geometrisch eine resultierende Kraft $\vec{k}_3$ (Abb. 2.2). Dies legt nahe, eine Addition von Vektoren geometrisch zu definieren:

**Definition 2.2** *Legt man den Anfangspunkt von* $\vec{b}$ *in den Endpunkt von* $\vec{a}$*, so wird der Vektor, der vom Anfangspunkt von* $\vec{a}$ *zum Endpunkt von* $\vec{b}$ *führt, mit* $\vec{a}+\vec{b}$ *bezeichnet.*

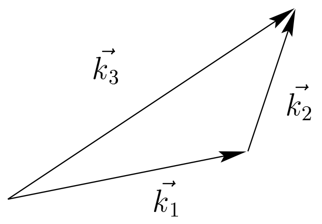


Abbildung 2.2: Vektoraddition

Man erhält (s. Abb. 2.3 und 2.4):

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}, \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

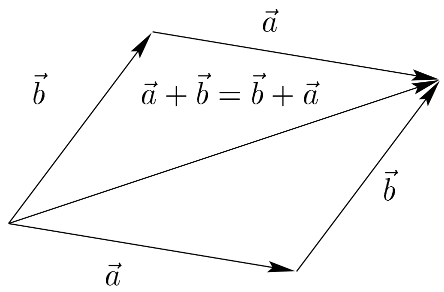


Abbildung 2.3: Kommutativgesetz der Vektoraddition

Der Vektor, der den gleichen Betrag wie $\vec{a}$ hat, aber die entgegengesetzte Richtung von $\vec{a}$ besitzt, wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

Dann gilt:

$$\vec{a}+(-\vec{a}) =: \vec{a}-\vec{a} = \vec{0}.$$

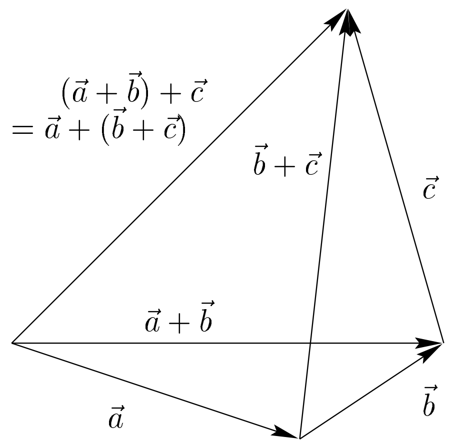


Abbildung 2.4: Assoziativgesetz der Vektoraddition

**Definition 2.3 (Multiplikation mit einem Skalar)** *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist*

$$\alpha \cdot \vec{a} = \begin{cases} \text{Vektor mit Richtung von } \vec{a},\ |\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| & \text{für } \alpha > 0, \\ \vec{0} & \text{für } \alpha = 0, \\ \text{Vektor mit Richtung von } -\vec{a},\ |\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

**Satz 2.4** *Die so definierten Vektoren erfüllen mit den oben definierten Rechenoperationen die sogenannten Vektorgesetze:*

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
6. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$
7. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
8. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

**Definition 2.5 (Linearkombination)** *Sind $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ und $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ gegeben, so nennt man $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\sum_{k=1}^n \alpha_k\vec{a}_k$ eine* Linearkombination *der Vektoren $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$.*

**Definition 2.6 (Lineare Abhängigkeit)** *Die Vektoren* $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots, \vec{a}_n$ *werden* linear abhängig *genannt, wenn es reelle Zahlen* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *gibt, von denen mindestens eine nicht Null ist, so daß*

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.1}$$

*gilt.*

*Ist die Linearkombination (2.1) genau dann gleich dem Nullvektor, wenn alle* $c_1, \ldots, c_n$ *gleich null sind, so werden* $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig *genannt.*

*(Sind alle Vektoren* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *parallel zu einer festen Ebene, so nennt man sie* komplanar.*)*

Aus der Definition (und der Geometrie) erhält man

**Satz 2.7**
1. *Gehört der Nullvektor zu* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$*, dann sind* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *linear abhängig.*
2. $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$; $\vec{a}, \vec{b}$ *linear abhängig* $\iff \vec{a} = \alpha\vec{b} \iff \vec{a}$ *parallel zu* $\vec{b}$,
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linear abhängig* $\iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *komplanar.*

*Im dreidimensionalen Anschauungsraum können maximal drei Vektoren* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ *linear unabhängig sein. Ist also* $n \geq 4$*, dann sind* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *linear abhängig.*

**Satz 2.8** *Sind* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ *linear unabhängig, dann gibt es zu jedem Vektor* $\vec{a}$ *eindeutig bestimmte Zahlen* $c_1, c_2, c_3$ *mit*

$$\vec{a} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3.$$

*Man nennt dann* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ *eine* Basis *und* $c_1, c_2, c_3$ *die* Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Der Vorteil einer Basis ist offensichtlich, denn sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\vec{a} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3$, $\vec{b} = d_1\vec{a}_1 + d_2\vec{a}_2 + d_3\vec{a}_3$ und $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha c_1 + \beta d_1)\vec{a}_1 + (\alpha c_2 + \beta d_2)\vec{a}_2 + (\alpha c_3 + \beta d_3)\vec{a}_3$, d. h. die geometrisch definierten Rechenoperationen „Addition“ und „Multiplikation mit einem Skalar“ werden komponentenweise zu den bekannten reellen Rechenoperationen „+“ und „·“.

Wir werden zweckmäßigerweise eine ausgezeichnete Basis festlegen und mit dieser Basis „rechnen“. Allerdings wollen wir zunächst noch zwei Produkte zwischen Vektoren einführen und dann die Basis so wählen, daß auch diese Produkte möglichst „bequem“ mit Hilfe der Basis in Rechenoperationen überführt werden können.

Zur Einführung des Skalarproduktes zweier Vektoren wollen wir uns wieder an einem physikalischen Beispiel orientieren. Sind Kraft und Weg gleichgerichtete Größen, so erhält man bekanntlich die geleistete mechanische Arbeit aus dem Produkt zwischen der Länge des Weges und dem Betrag der Kraft.

Sind Weg und Kraft nicht gleichgerichtet, so zerlegt man die Kraft $\vec{k}$ in eine Komponenten $\vec{k}_1$ in Richtung des Weges $\vec{s}$ und eine dazu senkrechte $\vec{k}_2$ (siehe Abb. 2.5). Ist $\alpha$ der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{s}$, so ist der Betrag von $\vec{k}_1$: $|\vec{k}| \cos\alpha$ $(0 \leq \alpha < 90°)$, und man erhält für die Arbeit (in Richtung des Weges):

$$A = |\vec{s}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos\alpha.$$

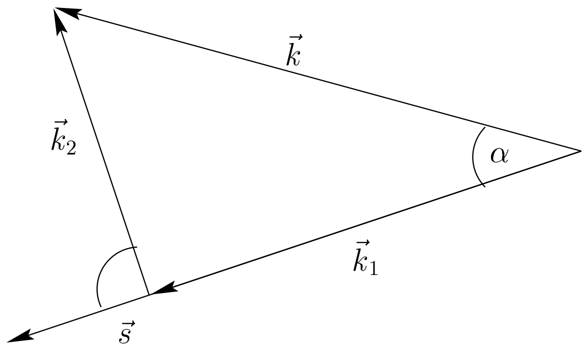


Abbildung 2.5: Skalarprodukt

Dies legt folgende Definition nahe:

**Definition 2.9 (Skalarprodukt (Innenprodukt))** *Sind $\vec{a}$ , $\vec{b} \neq \vec{0}$ und ist $\alpha$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so wird*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

*das* Skalarprodukt *zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt;* $\vec{a}\vec{0} = 0,\ \vec{0}\vec{a} = 0.$

**Satz 2.10** *Es gilt dann:*

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\alpha\vec{b})$

*4.* $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0, \quad \vec{a}\vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

*1,3 und 4 folgend fast unmittelbar aus der Definition und 2 aus geometrischen Überlegungen (s. Abb. 2.6).*

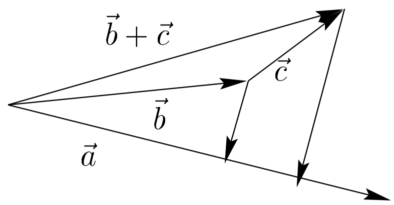


Abbildung 2.6: Eigenschaften des Skalarprodukts

Sind $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, so folgt aus der Definition, daß $\vec{a}\vec{b} = 0$ genau dann, wenn $a$ und $b$ senkrecht zueinander sind.

Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich der Kosinussatz und damit als Spezialfall der Satz des Pythagoras recht elegant herleiten:

**Satz 2.11 (Kosinussatz)** *Für ein Dreieck mit den Seitenlängen $a, b, c$ und Winkel $\alpha$ zwischen $a$ und $b$ gilt*

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\alpha$$

*(s. Abb. 2.7).*

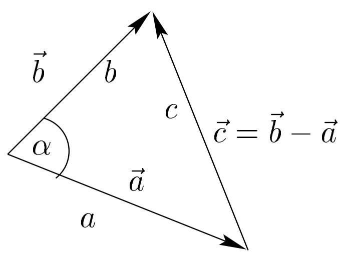


Abbildung 2.7: Kosinussatz

**Beweis:** Es ist $c^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$.

Mit $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$ folgt dann $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Ist $\alpha$ ein rechter Winkel, so folgt der Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

**Definition 2.12** *Sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so sagt man, sie bilden ein* Rechtssystem, *wenn sie folgendermaßen angeordnet sind:*

*Schaut man auf die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene, in der $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so angeordnet sind, daß man $\vec{a}$ in mathematisch positiver Richtung (also entgegen dem Uhrzeigersinn) drehen muß, um unter Überstreichen des kleineren Winkels zu $\vec{b}$ zu gelangen, dann weist $\vec{c}$ in Richtung des Betrachters (s. Abb. 2.8).*

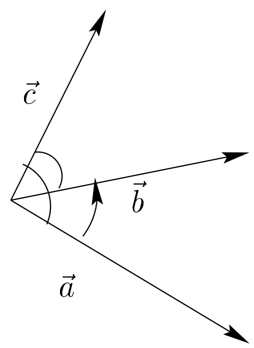


Abbildung 2.8: Rechtssystem

**Definition 2.13 (Vektorprodukt (äußeres Produkt))** *Sind $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ und ist $\alpha$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($0 < \alpha < 180°$), so wird mit $\vec{a} \times \vec{b}$ derjenige Vektor bezeichnet, der den Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}| := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ besitzt und sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ derart senkrecht ist, daß $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden. Es ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder wenn $\alpha = 0°$ bzw. $\alpha = 180°$ ist.*

Damit gilt:

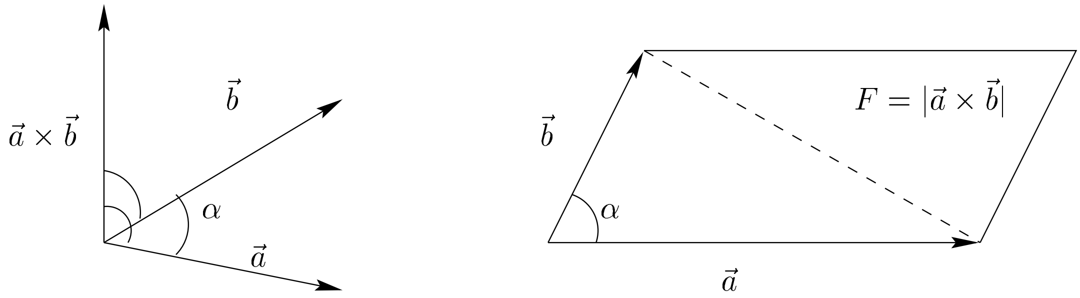


Abbildung 2.9: Vektorprodukt

**Satz 2.14** *$\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig $\iff$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

*Da $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist, erhält man für den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks:*

$$F = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Es sei nun $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, dann kann man $\vec{b} = \vec{b}_n + \vec{b}_a$ in eine zu $\vec{a}$ linear abhängige Komponente $\vec{b}_a$ und eine zu $\vec{a}$ senkrechte $\vec{b}_n$ zerlegen. Dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_n$ und für jeden Vektor $\vec{c}$ mit $\vec{c}_n = \vec{b}_n$ erhält man $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, so daß man beim Vektorprodukt (ebenso wie beim Skalarprodukt) keine Division definieren kann (vgl. Abb. 2.10).

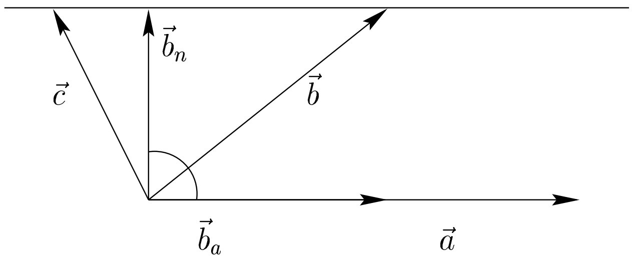


Abbildung 2.10: Vektorprodukt — Mehrdeutigkeit

Außerdem gelten folgende Gesetze:

**Satz 2.15** **(V1)** *$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,*

**(V2)** *$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$,*

**(V3)** *$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.*

**Beweis:** (V1) und (V2) erhält man fast unmittelbar aus der Definition des Vektorproduktes.

Zum Nachweis von (V3) beachte man, daß man wegen (V2) $|\vec{c}| = 1$ voraussetzen kann (für $\vec{c} = \vec{0}$ ist (V3) ohnehin erfüllt). Bezeichnen $\vec{a}_n, \vec{b}_n$ und $(\vec{a} + \vec{b})_n$ die zu $\vec{c}$ senkrechten Komponenten von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$, so ist $\vec{a}_n + \vec{b}_n = (\vec{a} + \vec{b})_n$ und es genügt, $(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \times \vec{c} = \vec{a}_n \times \vec{c} + \vec{b}_n \times \vec{c}$ nachzurechnen. Wegen $|\vec{c}| = 1$ erhält man aber $\vec{a}_n \times \vec{c}$, $\vec{b}_n \times \vec{c}$ und $(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \times \vec{c}$ aus $\vec{a}_n, \vec{b}_n$ und $\vec{a}_n + \vec{b}_n$ durch eine Drehung um 90° in einer zu $\vec{c}$ senkrechten Ebene, so daß $(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \times \vec{c} = \vec{a}_n \times \vec{c} + \vec{b}_n \times \vec{c}$ unmittelbar aus $(\vec{a} + \vec{b})_n = \vec{a}_n + \vec{b}_n$ folgt (s. auch Abb. 2.11, $\vec{c}$ denke man sich dabei senkrecht zum Blatt nach oben gerichtet). □

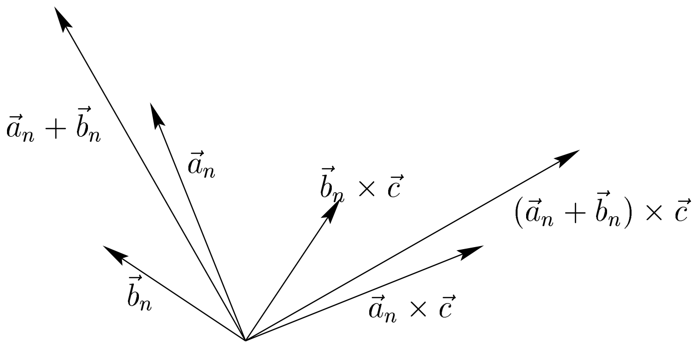


Abbildung 2.11: Vektorprodukt — Eigenschaft (V3)

## 2.2 Koordinatendarstellung von Vektoren

Kehren wir wieder zu dem Problem zurück, eine möglichst zweckmäßige Basis festzulegen, so ist es am günstigsten, die Basisvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ zueinander senkrecht zu wählen, sie zur Länge 1 zu normieren und sie so anzuordnen, daß sie ein Rechtssystem bilden, da dann sowohl das Skalarprodukt als auch das Vektorprodukt zwischen ihnen am einfachsten zu bilden ist.

**Definition 2.16 (Orientierte Orthonormalbasis)** *Sind die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ paarweise zueinander senkrecht, besitzen sie den Betrag 1 und bilden sie in der Reihenfolge $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein Rechtssystem, so wird $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine* orientierte Orthonormalbasis *genannt.*

Ist die Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ festgelegt, so läßt sich jeder Vektor $\vec{a}$ eindeutig als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ darstellen:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,$$

und da $\vec{a}$ durch seine Koordinaten $a_1, a_2, a_3$ bestimmt ist, schreibt man kurz

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

In einen festgelegten Nullpunkt 0 legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen in Richtung von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ liegen.

Trägt man in dieses Koordinatensystem die Koordinaten von $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ein, so erhält man einen Punkt $P$ und der Vektor $\vec{a}$ wird durch die von 0 nach $P$ gerichtete Strecke dargestellt (s. Abb. 2.10).

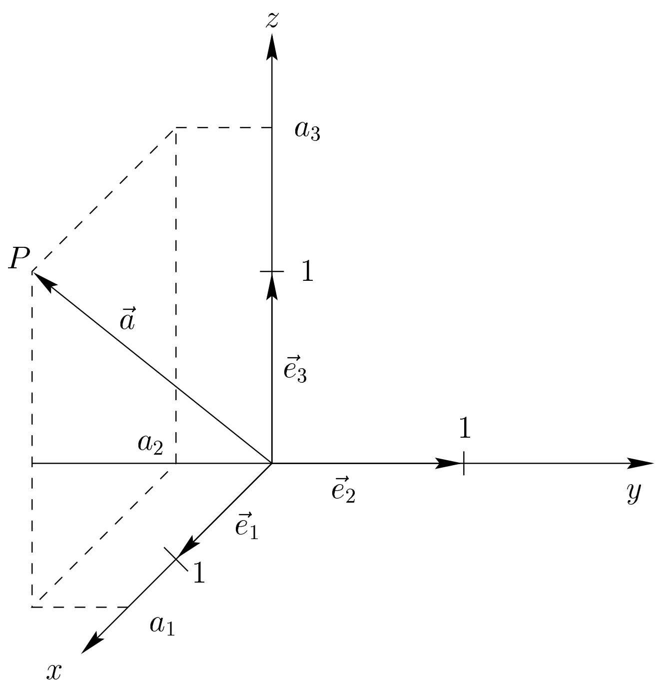


Abbildung 2.12: Darstellung eines Vektors

Insbesondere sind $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$.

### 2.2.1 Rechenoperationen für Vektoren in Koordinatendarstellung:

**Addition und Multiplikation mit einem Skalar**

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \lambda\vec{a} &= \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3). \end{aligned}$$

**Skalarprodukt**

Da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ paarweise senkrecht sind, gilt mit $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_1}_{=1} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_2}_{=0} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_3}_{=0} \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_1}_{=0} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_2}_{=1} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2\vec{e}_3}_{=0} \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_1}_{=0} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_2}_{=0} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3\vec{e}_3}_{=1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \end{aligned}$$

Also: $\vec{a}\vec{b} = (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

**Vektorprodukt**

Da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein Rechtssystem bilden, gilt:
$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0},\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0},\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$.
Mit $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ und (V2), (V3) erhält man

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{=\vec{0}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=-\vec{e}_2} \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{=-\vec{e}_3} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{=\vec{0}} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{=-\vec{e}_1} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{=\vec{0}} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3, \end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).
\end{aligned}
$$

Merkregel (nach Sarrus) für das Vektorprodukt:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \vec{e}_1 & & \vec{e}_2 & & \vec{e}_3 & & \vec{e}_1 & & \vec{e}_2 & & \\
 & & & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 & & a_2 & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & & & \\
- & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_1 & & b_2 & & + \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & -a_2 b_1 \vec{e}_3 & & -a_3 b_2 \vec{e}_1 & & -a_1 b_3 \vec{e}_2 & & +a_2 b_3 \vec{e}_1 & & +a_3 b_1 \vec{e}_2 & & +a_1 b_2 \vec{e}_3 & .
\end{array}
$$

**Beispiel 2.17** $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} + 2\vec{b} &= (2, -1, 1) + 2 \cdot (1, 1, 2) \\
&= (2 + 2 \cdot 1, -1 + 2 \cdot 1, 1 + 2 \cdot 2) \\
&= (4, 1, 5), \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (2, -1, 1)(1, 1, 2) \\
&= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\
&= 3, \\
\vec{a} \times \vec{b} &= (2, -1, 1) \times (1, 1, 2) \\
&= (-1 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) \\
&= (-3, -3, 3).
\end{aligned}
$$

$\square$

### 2.2.2 Mehrfache Produkte

**Definition 2.18 (Spatprodukt)** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$.

Mit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ erhält man

$$
[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).
$$

Merkregel:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 & & a_2 & & \\
 & & & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_1 & & b_2 & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & & & \\
- & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_1 & & c_2 & & + \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
-a_3b_2c_1 & & -a_1b_3c_2 & & -a_2b_1c_3 & & & & +a_1b_2c_3 & & +a_2b_3c_1 & & +a_3b_1c_2\ .
\end{array}
$$

Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so erhält man durch

$$V = |\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\,|$$

das Volumen des durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (Abb. 2.13).

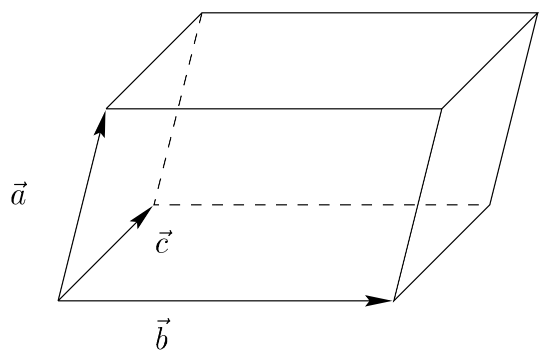


Abbildung 2.13: Spatprodukt

**Beispiel 2.19** Man berechne das Volumen des durch $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$ und $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ aufgespannten Tetraeders.

$$V_{Tet.} = \frac{1}{6} V_{Spat} \Longrightarrow V_{Tet.} = \frac{1}{6} |\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\,|, \quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 6 \Longrightarrow V_{Tet.} = 1.$$

$\square$

**Satz 2.20 (Eigenschaften des Spatproduktes)**

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sind linear abhängig.*

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}].$

**Mehrfache Vektorprodukte, Entwicklungssätze (ohne Beweis)**

**Satz 2.21**

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}.$$

## 2.3 Geometrische Anwendungen der Vektorrechnung

Ist $\alpha$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$, so ist nach Definition:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

Mit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $|\vec{a}| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und daher

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

**Beispiel 2.22** $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, dann ist

$$\cos \alpha = \frac{(1, -1, 2)(2, 1, 1)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

□

### 2.3.1 Geraden und Ebenen im Raum

Sind die Punkte $A\colon (a_1, a_2, a_3)$ und $B\colon (c_1, c_2, c_3)$ nicht gleich, so geht durch $A$ und $B$ bekanntlich genau eine Gerade $g$.

**Definition 2.23** *Ist* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ *der Vektor von A nach B und bezeichnet* $\vec{x} = (x, y, z)$ *einen beliebigen Vektor von 0 zu genau einem Punkt der Gerade, so erhält man die* Parameterform der Geradengleichung *(Abb. 2.14)*

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}, \qquad t: \ \textit{Parameter}, \ t \in \mathbb{R}.$$

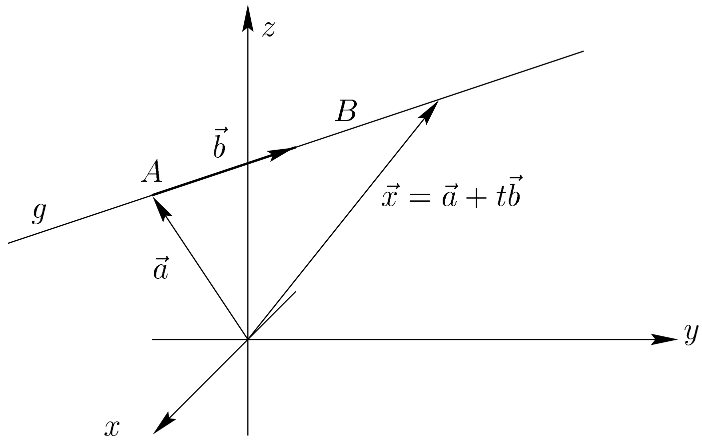


Abbildung 2.14: Parameterform der Geradengleichung

*Da die Vektoren* $\vec{b}$ *und* $\vec{x} - \vec{a}$ *linear abhängig sind, erhält man eine* parameterfreie Darstellung *für* $g$ *durch*

$$(\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0} \text{ bzw. } \vec{x} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

$\vec{b}$ *wird ein* Richtungsvektor *der Geraden* $g$ *genannt.*

**Beispiel 2.24** $A : (1, -1, 1)$, $C : (2, 1, -1)$, dann ist (z. B.) $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$ und man erhält

Parameterform:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x, y, z) \\ &= \vec{a} + t\vec{b} \\ &= (1, -1, 1) + t(1, 2, -2) \\ &= (1 + t, -1 + 2t, 1 - 2t), \end{aligned}$$

Parameterfreie Form:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{b} &= [(x, y, z) - (1, -1, 1)] \times (1, 2, -2) \\ &= (-2y - 2z, 2x + z - 3, 2x - y - 3) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

□

Liegen die drei Punkte $A\colon (x_0, y_0, z_0)$, $B\colon (x_1, y_1, z_1)$, $C\colon (x_2, y_2, z_2)$ nicht auf einer Geraden, so geht durch diese Punkte genau eine Ebene $E$.

Ist $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ der Vektor von $A$ nach $B$ und $\vec{b} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ der Vektor von $A$ nach $C$, so erhält man, wenn $\vec{x} = (x, y, z)$ den Vektor bezeichnet, der von 0 zu einem beliebigen Punkt der Ebene $E$ führt, mit

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} + \tau\vec{b}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}$$

eine *Parameterdarstellung der Ebene* $E$ (Abb. 2.15). Ist $\vec{n} \neq \vec{0}$ ein Vektor, der zur Ebene $E$ senkrecht ist (z. B. $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$), so ist $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n}\vec{b} = 0$, also erhält man aus der Parameterdarstellung von $E$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) = t\vec{n}\vec{a} + \tau\vec{n}\vec{b} = 0 \text{ mit } \vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

eine *Normalform* der Ebene.

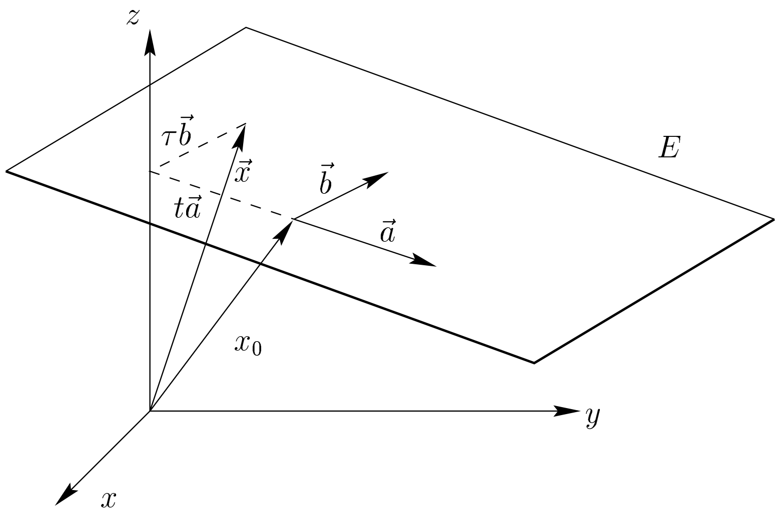


Abbildung 2.15: Parameterdarstellung einer Ebene

In Komponenten ($\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$) erhält man

$$(n_1, n_2, n_3) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0,$$

also

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - d = 0, \quad d = \vec{n} \cdot \vec{x}_0.$$

**Definition 2.25** *Wählt man in* $\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ *das Vorzeichen derart, daß* $d_0 = \vec{x}_0\vec{n}_0 \geq 0$ *gilt, so erhält man die* Hessesche Normalform *der Ebene $E$:*

$$N_1x + N_2y + N_3z - d_0 = 0, \quad \vec{n}_0 = (N_1, N_2, N_3).$$

**Beispiel 2.26** $A: (1,-1,1),\ B: (2,1,-1),\ C: (-1,1,1)$; gesucht: Ebene $E$ durch $A, B, C$. Mit $\vec{x}_0 = (1,-1,1),\ \vec{a} = (1,2,-2),\ \vec{b} = (-2,2,0)$ erhält man eine Parameterdarstellung: $\vec{x} = (1,-1,1) + t(1,2,-2) + \tau(-2,2,0)$. Mit $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (4,4,6)$ erhält man

$$(4,4,6)[(x,y,z) - (1,-1,1)] = 4x + 4y + 6z - 6 = 0$$

und damit eine Normalform: $2x + 2y + 3z - 3 = 0$.
Hessesche Normalform: $\frac{2}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}y + \frac{3}{\sqrt{17}}z - \frac{3}{\sqrt{17}} = 0.$ □

Abstand eines Punktes $P: (p_1, p_2, p_3)$ zur Ebene $E$: Der Lotvektor $\vec{l}$ von $P$ auf $E$ ist senkrecht zu $E$ und ist $P_1: (q_1, q_2, q_3)$ der Lotfußpunkt von $\vec{l}$ auf $E$, so gilt: Der Abstand von $P$ zu $E$ ist $|\vec{l}|$ (s. Abb. 2.16). Ist $E$ durch $(\vec{x} - \vec{x}_0)\vec{n} = 0$ gegeben, dann ist $\vec{l} = \lambda\vec{n}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, und daher $|\vec{l}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{l}|}{|\vec{n}|}$. Wegen $\vec{l} = \vec{x}_0 + \vec{a}_1 - \vec{p}$ und $\vec{a}_1 \cdot \vec{n} = 0$, gilt

$$|\vec{l}| = \frac{1}{|\vec{n}|}|(\vec{x}_0 + \vec{a}_1 - \vec{p}) \cdot \vec{n}| = \frac{1}{|\vec{n}|}|(\vec{p} - \vec{x}_0)\vec{n}|.$$

Also erhält man: $E\colon n_1x + n_2y + n_3z - d = 0,\ P\colon (p_1, p_2, p_3)$,

$$|\vec{l}| = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3 +_3 -d|.$$

Ist speziell $P: (0,0,0)$ der Nullpunkt, so ist der Abstand von (0,0,0) zu $E$:

$$A = \frac{|d|}{|\vec{n}|} = \frac{|d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = d_0 \quad (d_0\text{: siehe Hessesche Normalform}).$$

**Definition 2.27** *Sind der Punkt* $P\colon (x_0, y_0, z_0)$ *und die Gerade* $g\colon \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ *gegeben, so wird der Vektor* $\vec{l}$*, welcher von $P$ zur Geraden $g$ führt und senkrecht zu $g$ ist,* Lotvektor von $P$ auf $g$ *genannt. Der* Abstand von $P$ zu $g$ *ist dann* $|\vec{l}|$*. Es ist* $\vec{l} = \vec{a} + t_0\vec{b} - \vec{x}_0,\ (\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)),\ t_0$ *wird aus* $0 = \vec{l}\vec{b} = (\vec{a} - \vec{x}_0)\vec{b} + t_0\vec{b}\vec{b}$ *bestimmt.*

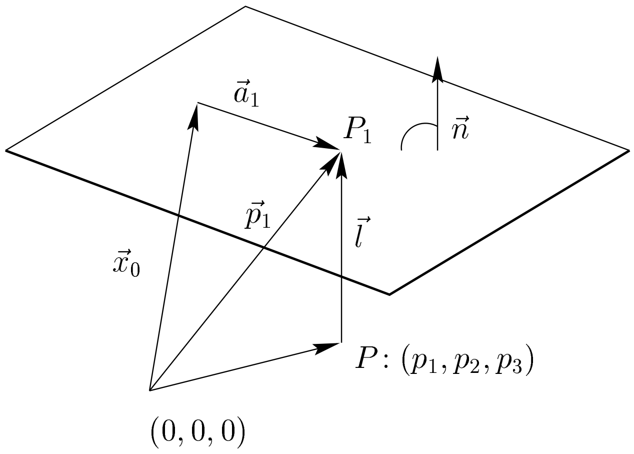


Abbildung 2.16: Abstand eines Punktes

**Satz 2.28** *Sind die Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + t\vec{b}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + \tau\vec{b}_2$ gegeben, so gilt (wenn $g_1$ und $g_2$ nicht identisch sind)*

1. *$g_1, g_2$ parallel zueinander ($g_1 \| g_2$) $\Longleftrightarrow$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ linear abhängig,*
2. *$g_1$ und $g_2$ schneiden sich $\Longleftrightarrow$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ sind linear abhängig. Berechnung des Schnittpunktes durch Lösen der Gleichung $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + t_0\vec{b}_1 - \tau_0\vec{b} = 0$.*
3. *Sind $g_1, g_2$ nicht parallel und schneiden sich nicht, so werden $g_1, g_2$* windschief *genannt $\Longleftrightarrow$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ sind linear unabhängig.*

Sind $g_1, g_2$ windschief, so besitzen sie einen gemeinsamen Lotvektor $\vec{l}$. $\vec{l}$ ist sowohl zu $g_1$ als auch zu $g_2$ senkrecht. Der Abstand von $g_1, g_2$ ist $|\vec{l}|$. Es existieren $t_1$ und $\tau_1$ mit (z. B.) $\vec{l} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + t_1 b_1 - \tau\vec{b}_2$ und wegen $\vec{l} \cdot \vec{b}_1 = 0$, $\vec{l}\vec{b}_2 = 0$, erhält man $t_1$, $\tau_1$ aus

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\vec{b}_1 + t_1|\vec{b}_1|^2 - \tau_1\vec{b}_2\vec{b}_1 \\ 0 &= (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\vec{b}_2 + t_1\vec{b}_2\vec{b}_1 - \tau_1|\vec{b}_2|^2. \end{aligned}$$

Da sowohl $\vec{l}$ als auch $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ senkrecht zu $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sind, gilt wegen

$$\frac{\vec{l}(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = |\vec{l}| = \left|(\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + t_1\vec{b}_1 - st_1\vec{b}_2) \cdot \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| = \left|(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

für den Abstand $|\vec{l}|$ von $g_1$ und $g_2$:

$$|\vec{l}| = \frac{|(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = \frac{|\,[\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2]\,|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|},$$

und man erhält

$$\vec{l} = |\vec{l}| \cdot \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = \frac{|\,[\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2]\,|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|^2}(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2).$$

$\vec{l}$ ist bis auf den Faktor $\pm 1$ eindeutig bestimmt.

**Satz 2.29** *Ist die Ebene $E$ in Normalform gegeben:*

$$E:\ n_1x + n_2y + n_3z - d = 0,\ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \text{ Normale zu } E,$$

*und die Gerade $g$ in Parameterform*

$$(x, y, z) = \vec{a} + t\vec{b} = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3),$$

*dann gibt es zwei Möglichkeiten:*

1. $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \iff$ *$g$ parallel zu $E$ oder $g$ liegt in $E$,*
2. $\vec{n} \cdot \vec{b} \neq 0$, *dann gibt es genau ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $n_1(a_1 + t_0b_1) + n_2(a_2 + t_0b_2) + n_3(a_3 + t_0b_3) - d = \vec{n} \cdot \vec{a} + t_0\vec{n}\vec{b} - d = 0$, d. h. $g$ schneidet $E$ in genau einem Punkt $S$, der Vektor $\vec{s} = \vec{a} + t_0\vec{b}$ führt zu $S$.*

**Satz 2.30** *Zwei Ebenen*

$$E_1: n_1x + n_2y + n_3z - d_1 = 0, \quad E_2: m_1x + m_2y + m_3z - d_2 = 0,$$

*sind genau dann parallel, wenn ihre Normalen $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ und $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ linear abhängig sind, d. h. $\vec{m} = \lambda\vec{n}$.*

Sind $E_1$ und $E_2$ nicht parallel, so schneiden sie sich in einer Geraden. Eine Gleichung der Schnittgeraden erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} m_1x + m_2y + m_3z &= d_2,\\ n_1x + n_2y + n_3z &= d_1. \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel zwischen $E_1$ und $E_2$ ist der Winkel zwischen ihren Normalen $\vec{n}$ und $\vec{m}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}.$$

Sind $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, so kann man z. B. $\vec{b}$ in eine Komponente $\vec{b}_1$ in „Richtung" von $\vec{a}$ und eine Komponente $\vec{b}_2$ senkrecht zu $\vec{a}$ zerlegen. Es ist $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ und $\vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1,\ \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$.
Projektion eines Vektors $\vec{a}$ in die Ebene $E$: Ist $\vec{n}$ eine Normale zu $E$, so ist

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \text{ mit } \vec{a}_1 = \frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \text{ (siehe oben).}$$

$\vec{a}_2 = \vec{a} - \vec{a}_1$ ist dann senkrecht zu $\vec{n}$ und ist daher die Projektion von $\vec{a}$ in $E$.

## 2.4 Komplexe Zahlen (Teil I)

Bekanntlich hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$, da $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

**Definition 2.31** *Erweitert man den Körper der reellen Zahlen um die* Imaginäre Einheit $i$: $i^2 = -1$, *so gelangt man zum Raum der komplexen Zahlen:*

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\},\ i^2 = -1$$

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2;\ z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2,\ 0 = 0 + i0$ *Nullelement.*

Mit der Addition

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

und der Multiplikation mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha z_1 := \alpha(x_1 + iy_1) = (\alpha x_1) + i(\alpha y_1)$$

kann man die komplexen Zahlen als 2-dimensionalen Vektorraum (die GAUSS*sche Zahlenebene*) auffassen (Abb. 2.17).

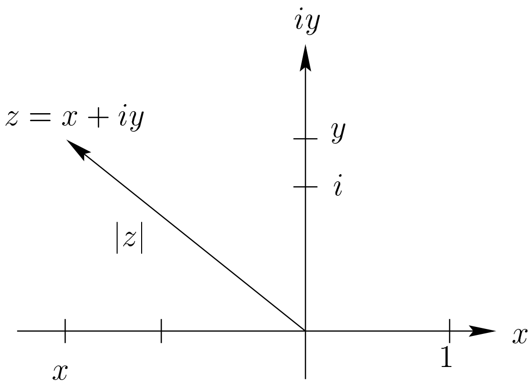


Abbildung 2.17: Gaußsche Zahlenebene

**Definition 2.32** *Für $z = x + iy$ heißt $x = \operatorname{Re} z$ der* Realteil *von $z$ und $y = \operatorname{Im} z$ der* Imaginärteil*,*

*$\overline{z} = x - iy$ wird die zu $z$* konjugiert komplexe Zahl *genannt,*

*$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der* Betrag *von $z$, $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \iff z = 0$.*

**Definition 2.33 (Produkt komplexer Zahlen)** $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

*(Man multipliziert die Klammern wie gewohnt aus und beachtet $i^2 = -1$.)*

**Satz 2.34** *Es gilt:*

1. $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$,
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

**Definition 2.35** *Ist $z = x + iy \neq 0$, so sei*

$$\frac{1}{z} := \frac{\overline{z}}{|z|^2} := \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i \quad \Longrightarrow z \cdot \frac{1}{z} = \frac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

*Division: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$.*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$

**Definition 2.36 (Quadratwurzel in $\mathbb{C}$)** $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, *gesucht:* $z = x + iy$ *mit* $z^2 = \alpha \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \iff x^2 - y^2 = a,\ 2xy = b$.

**$b \neq 0$:** $y = \dfrac{b}{2x} \Rightarrow x^4 - ax^2 - \dfrac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}},\ y_{1,2} = \dfrac{b}{2x_{1,2}}$.

**$b = 0,\ a > 0$:** *(reelle Wurzel)*

**$b = 0,\ a < 0$:** $\Rightarrow \sqrt{\alpha} = \sqrt{-|\alpha|} = \pm i\sqrt{|a|}$

# Kapitel 3

# Funktionen

## 3.1 Zahlenmengen und Folgen in $\mathbb{R}$

**Definition 3.1 (Intervalle)** *(Es sei stets $a \leq b$)*

$(a, b) = ]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ halboffene Intervalle

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$, $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ unbeschränkte Intervalle.

**Definition 3.2** *Sei $M$ eine Teilmenge der reellen Zahlen ($M \subset \mathbb{R}$), dann nennt man* $M$ nach $\left\{\begin{array}{c}\text{oben}\\ \text{unten}\end{array}\right\}$ beschränkt, *wenn es ein* $\left\{\begin{array}{c}m_1 \in \mathbb{R}\\ m_2 \in \mathbb{R}\end{array}\right\}$ *gibt mit* $\left\{\begin{array}{c}x \leq m_1\\ x \geq m_2\end{array}\right\}$ *für alle $x \in M$. $M$ heißt* beschränkt, *wenn $M$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.*

*Ist $M$ nach* $\left\{\begin{array}{c}\textit{oben}\\ \textit{unten}\end{array}\right\}$ *beschränkt, so besitzt $M$ eine* $\left\{\begin{array}{c}\textit{kleinste obere Schranke } s_1\\ \textit{größte untere Schranke } s_2\end{array}\right\}$.

*$s_1$ nennt man dann das* Supremum *von $M$: $s_1 = \sup M$, $s_2$ das* Infimum *von $M$: $s_2 = \inf M$.*

*Ist $s_1 \in M$, so wird $s_1$ das* Maximum *von $M$ genannt: $s_1 = \max M$. Ist $s_2 \in M$, so wird $s_2$ das* Minimum *von $M$ genannt: $s_2 = \min M$.*

*Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so nennt man*

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

*eine* $\varepsilon$-Umgebung *von* $x_0$.

*Ist* $M \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *so nennt man* $x_0$ *einen* Häufungspunkt von $M$, *wenn in jeder* $\varepsilon$*-Umgebung von* $x_0$ *unendlich viele Elemente von* $M$ *enthalten sind.*

**Definition 3.3 (Zahlenfolgen)** *Wird jedem* $n \in \mathbb{N}$ *genau eine reelle Zahl* $a_n$ *zugeordnet* ($n \mapsto a_n$), *so nennt man diese Zuordnung eine* Zahlenfolge: $\{a_n\}_1^\infty$.

**Beispiel 3.4**

1. $n \to \frac{1}{n} = a_n$, $\{\frac{1}{n}\}_1^\infty$ aufzählend: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
2. $q \in \mathbb{R}$ fest, $n \to q^n = a_n$, $\{q^n\}_1^\infty$, $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$
3. $n \to (1+\frac{1}{n})^n = a_n$, $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_1^\infty$, $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$

□

**Rekursiv definierte Folgen:**

In den Anwendungen (z. B. iterative Lösungsverfahren für Gleichungen) treten manchmal rekursive Folgen auf: $a_1, \ldots, a_k$ ($k$ fest) sind vorgegeben und

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k-1}).$$

**Beispiel 3.5**

1. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),\ n = 1, 2, \ldots$
2. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}),\ n = 1, 2, \ldots.$

□

Zahlenfolgen werden meist durch eine Bestimmungsgleichung $a_n = f(n)$ oder rekursiv definiert. Um den Schreibaufwand zu verringern, werden im folgenden nur die definierenden Gleichungen angegeben.

**Definition 3.6** *Die Zahlenfolge* $\{a_n\}_1^\infty$ *wird* konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ *genannt, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $|a_n - a| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq n_0(\varepsilon)$. $a$ *wird dann der* Grenzwert von $\{a_n\}$ *genannt:* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *(„$a$ ist gleich Limes $n$ gegen $\infty$ von $a_n$“). Ist die Folge* $\{a_n\}$ *nicht konvergent, so nennt man sie* divergent.

**Beispiel 3.7** $a_n = \frac{n-1}{n}$, dann ist (mit $a = 1$)

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ ($[x] :=$ größte ganze Zahl $\leq x$), dann gilt für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

also ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

□

**Definition 3.8** *Man sagt, die Folge* $\{a_n\}$ *besitzt den* uneigentlichen Grenzwert $\left\{\begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array}\right\}$*, wenn zu jedem* $M > 0$ *ein* $n_0(M)$ *existiert mit* $\left\{\begin{array}{c} a_n > M \\ a_n < -M \end{array}\right\}$ *für alle* $n \geq n_0(M)$*;* $\lim_{n\to\infty} a_n = \left\{\begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array}\right\}$.

**Beispiel 3.9** $a_n = n^2 \Longrightarrow$ uneigentlicher Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

$a_n = -2^n \Longrightarrow$ uneigentlicher Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} -2^n = -\infty$. □

**Definition 3.10** $\{a_n\}$ *wird* Nullfolge *genannt, wenn* $\{a_n\}$ *gegen Null konvergiert, d. h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *gilt.*

**Satz 3.11** *Es gilt:*

1. $\{a_n\}$ *ist Nullfolge* $\Longleftrightarrow$ $\{|a_n|\}$ *ist Nullfolge,*

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \{a_n - a\}$ *Nullfolge.*

**Definition 3.12** $\{a_n\}_1^\infty$ *wird* Cauchyfolge *genannt, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0(\varepsilon)$ *existiert mit* $|a_m - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $m, n > n_0(\varepsilon)$.

**Satz 3.13** *Es gilt (Vollständigkeit der reellen Zahlen):*

$\{a_n\}_1^\infty$ *ist Cauchyfolge* $\Longleftrightarrow$ *es existiert ein* $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$.

**Definition 3.14** *Die Folge* $\{a_n\}_1^\infty$ *wird* nach $\left\{\begin{array}{c}\text{oben}\\ \text{unten}\end{array}\right\}$ beschränkt *genannt, wenn ein* $m \in \mathbb{R}$ *existiert mit* $\left\{\begin{array}{c}a_n \le m\\ a_n \ge m\end{array}\right\}$ *für alle* $n = 1, 2, \ldots$.

*Man nennt die Folge* beschränkt, *wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.*

**Definition 3.15** *Die Folge* $\{a_n\}$ *wird* monoton $\left\{\begin{array}{c}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{array}\right\}$ *genannt, wenn ab einem* $n_0$ $\left\{\begin{array}{c}a_{n+1} \ge a_n\\ a_{n+1} \le a_n\end{array}\right\}$ *für alle* $n \ge n_0$ *gilt. Man nennt sie* monoton, *wenn sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.*

**Satz 3.16** *Ist die Folge* $\{a_n\}_1^\infty$ *monoton und beschränkt, dann ist sie konvergent.*

*(Jede monotone unbeschränkte Folge besitzt einen uneigentlichen Grenzwert:* $+\infty$*, falls sie wachsend ist;* $-\infty$*, falls sie fallend ist.)*

Für das Rechnen mit Folgen ist der folgende Satz nützlich:

**Satz 3.17 (Grenzwertsatz)** *Es seien* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gegeben mit* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, *dann gilt:*

1. $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha a + \beta b$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$.
3. *Ist* $b \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.
4. *Gilt ab einem* $n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n \le c_n \le b_n$ *und ist* $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow a = \lim_{n\to\infty} c_n$.
5. *Ist* $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *und* $b_n$ *beschränkt* $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.
6. *Ist* $k$ *eine feste natürliche Zahl und* $a_n \ge 0$ *für alle* $n = 1, 2, \ldots,$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$.

**Definition 3.18** *$x_0$ wird* Häufungspunkt *der Folge $\{a_n\}_1^\infty$ genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ gibt mit $|a_n - x_0| < \varepsilon$.*

*Es gilt nun: Jede beschränkte Folge $\{a_n\}$ besitzt einen größten Häufungspunkt $m_1$ und einen kleinsten Häufungspunkt $m_2$ ($m_2 \le m_1$). Die Folge ist genau dann konvergent, wenn $m_2 = m_1$ ist.*

*Man nennt* $m_1 = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ Limes superior

$m_2 = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ Limes inferior.

**Beispiel 3.19** $a_n = \frac{n+1}{n} \sin(n \cdot 90°)$ besitzt die Häufungspunkte $-1, 0, 1$, also ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sin(n \cdot 90°) = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sin(n \cdot 90°) = 1$. □

## 3.2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen

**Definition 3.20** *Eine* Funktion *$f$ ist eine Zuordnungsvorschrift, welche jedem Element einer Menge $D_f$ (dem* Definitionsbereich von *$f$) genau eine Element einer Menge $W$ (der* Zielmenge von *$f$) zuordnet.*

*Schreibweise: $f : D_f \to W, \quad f : x \mapsto f(x)$.*

Im folgenden wird $D_f \subset \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$ sein, man spricht dann von einer reellen Funktion einer reellen Variablen.

**Beispiel 3.21** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto |x| = f(x)$; $\quad f : \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge 0\} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sqrt{x}$. □

Im folgenden werden Funktionen durch eine (oder mehrere) Bestimmungsgleichung(en) definiert. Es wird dann nur diese Gleichung für $f$ angegeben. $D_f$ ist dann der maximal mögliche Definitionsbereich.

**Beispiel 3.22** Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 = f(x)$ wird $f(x) = x^2$ geschrieben. □

**Schaubild:** Im rechtwinkligen $(x, y)$-Koordinatensystem werden die Punkte $(x, f(x))$ eingetragen (Abb. 3.1).

**Definition 3.23 (Einfache Symmetrie:)** *$f$ sei auf dem Intervall $[-a, a]$, $a > 0$ definiert.*

*$f$ heißt gerade* $\iff f(-x) = f(x)$ *(Schaubild symmetrisch zur $y$-Achse)*

*$f$ heißt ungerade* $\iff f(-x) = -f(x)$ *(Schaubild symmetrisch zum Punkt (0,0))*

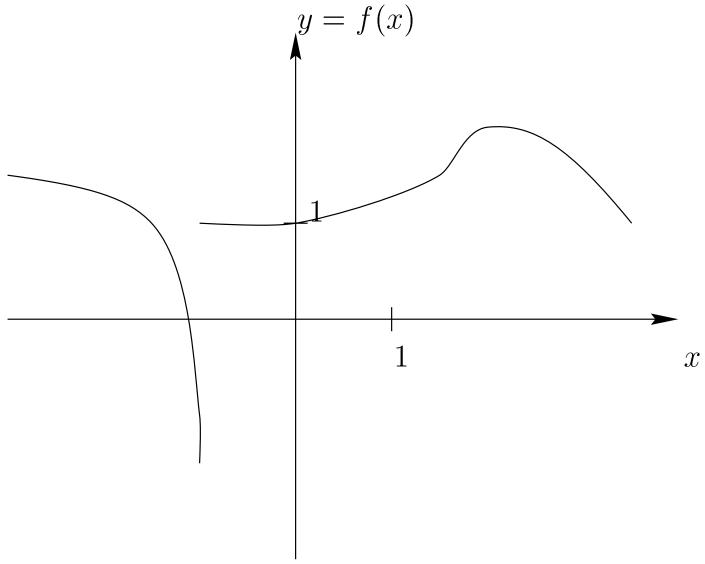


Abbildung 3.1: Schaubild einer Funktion

**Definition 3.24** *Sei $x_0 \in (a,b)$ und $f$ auf $(a,b) \setminus \{x_0\}$ definiert.*

*$f$ besitzt bei $x_0$ den* Grenzwert *$a$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert mit $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \wedge x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Man schreibt dann:* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

| | | |
|---|---|---|
| Linksseitiger Grenzwert: | $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$ | *(Def. wie bei Grenzwert, es wird aber nur $x < x_0$ zugelassen)* |
| Rechtsseitiger Grenzwert: | $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$ | *(Def. wie bei Grenzwert, es wird aber nur $x > x_0$ zugelassen)* |

**Definition 3.25** *Es sei $f$ auf $[a,b]$ definiert, $x_0 \in [a,b]$,*

*$f$ heißt stetig in $x_0$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x_0, \varepsilon)$ existiert mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x$ mit $|x - x_0| \leq \delta(x_0, \varepsilon) \wedge x \in [a,b]$.*

*$f$ stetig in $x_0$* $\iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} f(x) = f(x_0)$.

**Definition 3.26** *$f$ heißt stetig auf $[a,b]$, wenn $f$ in jedem Punkt $x_0 \in [a,b]$ stetig ist.*

**Satz 3.27** *Gilt $|f(x) - c| \leq M|x - x_0|^\alpha$, $M \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $x \in [a,b] \setminus \{x_0\} \Longrightarrow$* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} f(x) = c$ *und ist $c = f(x_0)$, so ist $f$ stetig in $x_0$.*

**Beweis:** Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta(\varepsilon, x_0) = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, und beachte, daß aus $\varepsilon \to 0$ auch $\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \to 0$ folgt. $\square$

**Satz 3.28 (Grenzwertsatz)** *Seien $f, g, h$ auf $(a, b) \setminus \{x_0\}$ definiert, es gelte $c = \lim_{x \to x_0} f(x)$, $d = \lim_{x \to x_0} g(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\lim_{x \to x_0}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha c + \beta d,$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x \to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \to x_0} g(x)) = c \cdot d,$
3. *Ist* $d \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{c}{d},$
4. *Ist $c = d$ und gilt $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ auf $(a, b) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow c = \lim_{x \to x_0} h(x_0)$.*

**Satz 3.29** *Wegen $f$ stetig bei $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, gilt: Sind $f, g$ stetig auf $[a, b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$*

1. *$\alpha f + \beta g$ stetig auf $[a, b]$,*
2. *$f \cdot g$ stetig auf $[a, b]$,*
3. *$\frac{f}{g}$ stetig in jedem Punkt von $[a, b]$, in dem $g \neq 0$ ist.*

**Satz 3.30 (Zwischenwertsatz)** *Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig, so existieren ein $m_1$ und ein $m_2$, sowie $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit*

$$m_1 = f(x_1),\ m_2 = f(x_2) \text{ und } m_1 \leq f(x) \leq m_2 \text{ für alle } x \in [a, b]$$

*und zu jedem $y$ mit $m_1 \leq y \leq m_2$ existiert mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $y = f(x)$.*

**Folgerung:** *Ist $f$ stetig auf $[a, b]$ und nimmt $f$ dort sowohl positive als auch negative Werte an, so besitzt $f$ mindestens eine Nullstelle $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) = 0$.*

## 3.3 Die elementaren Funktionen

### 3.3.1 Polynome (ganzrationale Funktionen)

**Definition 3.31**

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

*wird* Polynom *genannt.* $n = \operatorname{grad} P$ *heißt* Grad von $P$.

Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig (Nachweis siehe Differentialrechnung). Sei $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, dann gilt: $P(x) = Q(x) \iff a_k = b_k$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so erhält man durch Division

$$P(x) : (x - x_0) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^{j-1} + \frac{b_0}{x - x_0} \quad \text{mit } b_n = a_n$$

$$\Longrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=1}^{n} b_j (x - x_0) x^{j-1} + b_0 = a_n x^n + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - x_0 b_{j+1}) x^j$$

$\Longrightarrow b_n = a_n \wedge a_j = b_j - x_0 b_{j+1}$, d. h. $b_j = a_j + x_0 b_{j+1}$, $j = n-1, n-2, \ldots, 0$. $\Longrightarrow$ **Hornerschema** zur Berechnung der $b_j$.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{k+1} & a_k & \ldots & a_0 \\
 & & + & & + & + & & + \\
x_0 & & x_0 a_n & \ldots & x_0 b_{k+2} & x_0 b_{k+1} & \ldots & x_0 b_1 \\
\hline
 & a_n & b_{n-1} & \ldots & b_{k+1} & b_k & \ldots & b_0
\end{array}$$

Es gilt:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (x - x_0) \sum_{k=1}^{n} b_k x^{k-1} + b_0.$$

$\Longrightarrow P(x_0) = b_0,\ b_0 = 0 \iff P(x_0) = 0.$

Ist $P(x_0) = 0 \Longrightarrow P(x) = (x - x_0) \sum_{k=1}^n b_k x^{k-1} = (x - x_0) P_1(x)$ mit grad $P_1 = n - 1$, d. h. ist $P(x_0) = 0$, so läßt sich von $P(x)$ der Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten; die Koeffizienten des Polynoms $P_1$ erhält man aus dem Hornerschema.

**Definition 3.32** *Kann von von $P$ genau $k(\leq n)$-mal den Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten, d. h. gilt*

$$P(x) = (x - x_0)^k P_k(x) \quad \textit{mit} \operatorname{grad} P_k = n - k \textit{ und } P_k(x_0) \neq 0,$$

*so nennt man $x_0$ eine $k$-*fache Nullstelle *von $P$.*

### 3.3.2 Rationale Funktionen

**Definition 3.33**

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \textit{ Polynome }, \; Q(x) \not\equiv 0,$$

*nennt man* rationale Funktionen.

*Es wird vorausgesetzt, daß $P$ und $Q$ teilerfremd sind, d. h. daß $P$ und $Q$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.*

*Eine $j$-fache Nullstelle von $Q$ wird dann* $j$-fache Polstelle von $R(x)$ *genannt.*

*Rationale Funktionen sind außerhalb der Polstellen stetig.*

### 3.3.3 Natürliche Exponentialfunktion

Es sei

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}.$$

($e_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n$.) Ist $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $n > |x|$, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} &= \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \\
&\overset{\text{Bern. Unglg.}}{\geq} \left(1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow e_n(x)$ ist für $n > |x|$ monoton wachsend in $n$.

Ist $|x| \leq \frac{1}{2}$, so ist

$$\frac{1}{e_n(x)} = \left(\frac{n}{n+x}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n+x}\right)^n \geq 1 - \frac{x \cdot n}{n+x} > \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow e_n(x) < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|x| < \frac{1}{2}$.

Ist $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ fest mit $k > 2|x| \Longrightarrow$

$$e_{n \cdot k}(x) = \left(1 + \frac{x}{kn}\right)^{kn} = \left[(1 + \frac{x}{kn})^n\right]^k = e_n(\frac{x}{k})^k \leq 2^k, \quad (\text{da } \left|\frac{x}{k}\right| < \frac{1}{2})$$

$\Longrightarrow e_n(x)$ ist für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt $\Longrightarrow e(x) = \lim_{n\to\infty} e_n(x)$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aus $e_{n\cdot k}(x) = (e_n(\frac{x}{k}))^k$ erhält man $e(\frac{x}{k}) = [e(x)]^{\frac{1}{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Wegen $e_{m\cdot n}(m \cdot x) = [(1 + \frac{mx}{m\cdot n})^n]^m = [e_n(x)]^m$, ($m \in \mathbb{N}$, fest) $\Longrightarrow e(mx) = [e(x)]^m$.

$e(1) = e$ nennt man *Eulersche Zahl.* $e$ ist transzendent, $e \approx 2,718$. Für $n \geq 2$ erhält man mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$\frac{1}{e_n(1)e_n(-1)} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1}$$

und

$$e_n(1) \cdot e_n(-1) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq e_n(1) \cdot e_n(-1) \leq \frac{1}{1 + \frac{n}{n^2-1}} \Longrightarrow e(-1) = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Zusammengefaßt:

$$e(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},$$

daher schreiben wir für die natürliche Exponentialfunktion $e(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$; $e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Aus $e_n(x) \cdot e_n(y) = (1 + \frac{x+y}{n})^n[1 + \frac{xy}{n(n+x+y)}]^n$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{xy}{n(n+x+y)})^n = 1 \Longrightarrow e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Wegen $e(\frac{p}{q}x) = (e^x)^{\frac{p}{q}}$, ($p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$) und $e^x$ stetig $\Longrightarrow e^{x\cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x$.

Da $e_n(x) \geq 1$ für $x \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq 1$ für $x \geq 0$; $e_n(0) = 1 \Longrightarrow e(0) = 1$; $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \Longrightarrow e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zusammengefaßt:

**Satz 3.34** *1.* $e^x > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

*2.* $e^0 = 1$,

*3.* $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$,

*4.* $e^{x\cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x$,

*5.* $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

*e: Eulersche Zahl,* $e = 2,7182818\ldots$ *(unendlicher Dezimalbruch)*

Wegen $\frac{1}{1-h} \geq e^h \geq 1 + h$, $(|h| < 1) \Rightarrow \frac{h}{1-h} \geq e^h - 1 \geq h \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^h - 1) = 1$.

### 3.3.4 Hyperbelfunktionen

**Definition 3.35** *1.* $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ Sinushyperbolikus,

*2.* $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ Kosinushyperbolikus,

*3.* $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ Tangenshyperbolikus,

*4.* $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ Kotangenshyperbolikus.

**Satz 3.36** *Es gilt*

$$\begin{aligned} \cosh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}[e^{2x} + e^{-2x} + 2] \\ &= \frac{1}{4}[e^{2x} + e^{-2x} - 2] + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \sinh^2 x + 1, \end{aligned}$$

*also* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $2\cosh^2 x = \cosh 2x + 1$, $2\sinh^2 x = \cosh 2x - 1$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$, $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, $|\tanh x| < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$.

### 3.3.5 Trigonometrische Funktionen

**Definition 3.37 (Bogenmaß)** *Das* Bogenmaß *eines Winkels $\alpha$ ist die Länge des Bogens, der von dem Winkel aus dem Kreis mit Radius 1 um den Schreitelpunkt des Winkels ausgeschnitten wird. Wird der Winkel mathematisch positiv durchlaufen, so ist das Bogenmaß positiv, andernfalls negativ.*

Im weiteren werden Winkel stets im Bogenmaß gemessen (sofern nichts anderes ausdrücklick gesagt wird).

**Geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen über den Einheitskreis (s. Abb. 3.2)**

**Satz 3.38** *Es gilt:*

*1.* $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$,

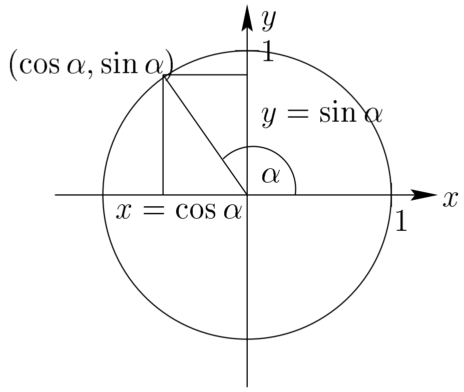


Abbildung 3.2: Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

2. $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha,\ \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha,$
3. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbb{Z},$
4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$
5. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$
6. $\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta,$
7. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

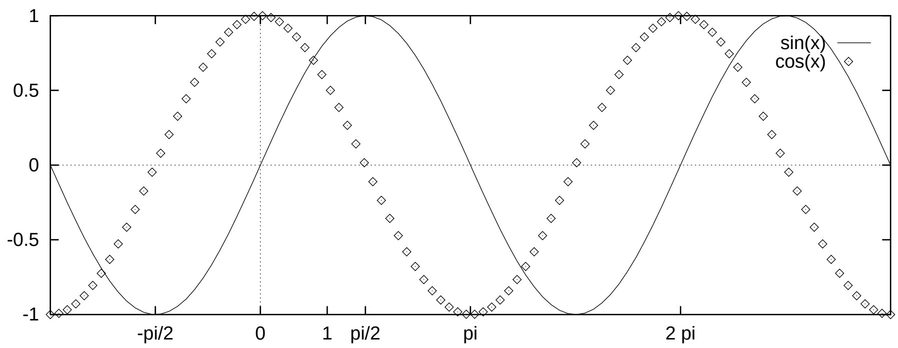


Abbildung 3.3: Sinus und Kosinus

**Definition 3.39 (Tangens, Kotangens)**

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

$\Longrightarrow \tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \Longrightarrow \tan(-x) = -\tan x$.

**Additionstheorem:**

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

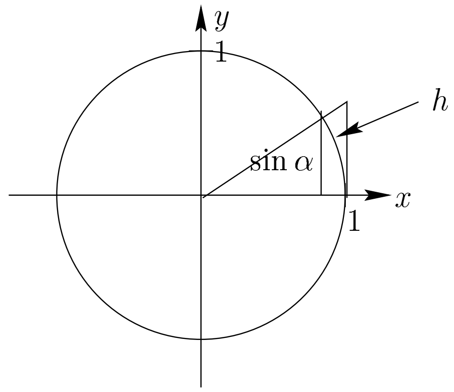


Abbildung 3.4: Abschätzung für den Sinus

Ist $0 < h < \frac{\pi}{2}$, so gilt (s. Abb. 3.4): $\sin h \leq h$ und $h\cos h \leq \sin h \Rightarrow \cos h \leq \frac{\sin h}{h} < 1 \Longrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Wegen $\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{\sin h}{h} \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

## 3.4 Umkehrfunktionen

Sei $f$ auf $[a, b]$ definiert, und $B$ das Bild von $[a, b]$ unter $f$, d. h. $B = \{y \mid y = f(x),\ x \in [a, b]\}$.

**Definition 3.40** *$f$ wird auf $[a, b]$* eineindeutig *genannt, wenn zu jedem $y_0 \in B$ genau ein $x_0 \in [a, b]$ gehört mit $y_0 = f(x_0)$.*

$f$ besitzt auf $[a, b]$ genau dann eine Umkehrfunktion $x = g(y)$, wenn $f$ auf $[a, b]$ eineindeutig ist. Es gilt dann für alle $x \in [a, b]$ und $y \in B$:

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y$$

Das Schaubild von $y = g(x)$ erhält man durch Spiegelung des Schaubildes von $f$ an der Geraden $y = x$ (Abb. 3.5). $g$ bildet $B$ auf $[a, b]$ ab.

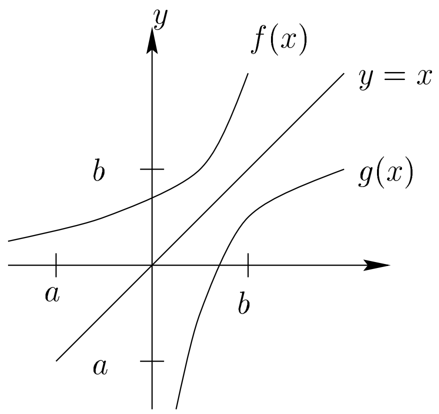


Abbildung 3.5: Umkehrfunktion

**Definition 3.41** *$f$ heißt auf $[a, b]$* streng monoton $\left\{\begin{array}{l}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{array}\right\}$, *wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt:* $\left\{\begin{array}{l}f(x_1) < f(x_2)\\ f(x_1) > f(x_2)\end{array}\right\}$. *($f$ heißt auf $[a, b]$* monoton $\left\{\begin{array}{l}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{array}\right\}$, *wenn aus $x_1 < x_2$ folgt:* $\left\{\begin{array}{l}f(x_1) \leq f(x_2)\\ f(x_1) \geq f(x_2)\end{array}\right\}$*.)*

*Man sagt: „$f$ ist auf $[a, b]$* streng monoton*“, wenn $f$ auf $[a, b]$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

**Satz 3.42** *Ist $f$ stetig auf $[a, b]$, so gilt:*

*$f$ ist auf $[a, b]$ umkehrbar $\iff$ $f$ ist auf $[a, b]$ streng monoton.*

*Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig und streng monoton $\left\{\begin{array}{l}wachsend\\ fallend\end{array}\right\}$, so ist die Umkehrfunktion $g$ von $f$ auf dem Intervall $\left\{\begin{array}{l}[f(a), f(b)]\\ [f(b), f(a)]\end{array}\right\}$ stetig und ebenfalls streng monoton $\left\{\begin{array}{l}wachsend\\ fallend\end{array}\right\}$.*

## 3.5 Umkehrfunktionen der elementaren Funktionen

### 3.5.1 Wurzelfunktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. $y = f(x) = x^{2n}$ ist auf $[0, +\infty)$ streng monoton wachsend, $B = [0, +\infty)$. Umkehrfunktion:

$$y = g(x) = \sqrt[2n]{x}, \quad x \geq 0, \ \sqrt[2n]{x} \geq 0.$$

2. $y = f(x) = x^{2n+1}$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $B = \mathbb{R}$. Umkehrfunktion:

$$y = g(x) = \sqrt[2n+1]{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 3.5.2 Logarithmus, allgemeine Potenz

Wegen $e^{x_1} > e^{x_2}$ für $x_1 > x_2$ (wäre für ein $x_1 > x_2$: $e^{x_1} \leq e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1 - x_2} \leq 1$. Widerspruch zu $e^{x_1 - x_2} > 1 + x_1 - x_2 > 1$.) ist $y = e^x$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $B = (0, +\infty)$. Die Umkehrfunktion von $e^x$ wird der *natürliche Logarithmus* genannt:

$$y = \ln x, \quad x > 0.$$

Es gilt: $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $e^{\ln x} = x$ für alle $x > 0$.

Aus den Gesetzen zu $y = e^x$ erhält man:

1. $a, b > 0 \Longrightarrow e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a \cdot b = e^{\ln(ab)} \Longrightarrow \ln ab = \ln a + \ln b$,
2. $a > 0, \ b \in \mathbb{R} : e^{b \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b = e^{\ln a^b} \Longrightarrow \ln(a^b) = b \ln a$,
3. $a > 0 : e^0 = 1 = \frac{a}{a} = e^{\ln a + \ln(\frac{1}{a})} \Longrightarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a$,
4. $e^0 = 1 = e^{\ln 1} \Longrightarrow \ln 1 = 0$.
5. Da $e^x$ stetig und streng monoton wachsend $\Longrightarrow \ln x$ stetig und streng monoton wachsend.

Für $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ definiert man

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ wird definiert

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Ist $a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) = a^x$, dann besitzt $f$ eine Umkehrfunktion

$$g(x) = \log_a x \quad \textit{(Logarithmus zur Basis a).}$$

Wegen $(x > 0)$: $x = a^{\log_a x} = e^{\ln a \log_a x} = e^{\ln x} \Longrightarrow \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$, also ist $\log_a x$ ein Vielfaches des $\ln x$.

### 3.5.3 Areafunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen (die *Areafunktionen*) lassen sich durch die ln-Funktion ausdrücken:

$$\begin{aligned}
y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &\Rightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \\
&\Rightarrow\ (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\Rightarrow\ e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\
&\Rightarrow\ x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\
&\Rightarrow\ y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \textit{Areasinushyperbolikus}
\end{aligned}$$

ist die Umkehrfunktion zu $y = \sinh x$.

Analog erhält man aus $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ den (Hauptzweig des) *Areakosinushyperbolikus*: $y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$.

Aus $y = \tanh x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ folgt:

*Areatangenshyperbolikus*: $y = \operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x},\ |x| < 1.$

*Areakotangenshyperbolikus*: $y = \operatorname{arcoth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1},\ |x| < 1.$

### 3.5.4 Arkusfunktionen

Die Funktion $y = \tan x$ ist auf dem Intervall $J_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und nimmt dort jeden Wert an, daher existiert dort eine Umkehrfunktion, die *Arkustangensfunktion* (Hauptzweig):

$$y = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x| < \frac{\pi}{2}.$$

Bildet man die Umkehrfunktion der Tangensfunktion auf dem Intervall $J_k = ((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, so erhält man den $k$-ten Nebenzweig des Arkustangens $y = \arctan_k x$, und wegen $\tan(x + k\pi) = \tan x$ ($k \in \mathbb{Z}$) folgt:

$$\arctan_k x = \arctan x + k\pi.$$

Die Funktion $y = \sin x$ ist auf dem Intervall $J_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und nimmt dort alle Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ an, also existiert dort eine Umkehrfunktion, die *Arkussinusfunktion* (Hauptzweig):

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1], \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kehrt man $y = \sin x$ auf dem Intervall $J_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ um, so erhält man den ersten Nebenzweig des Arkussinus:

$$y = \arcsin_1 x, \quad x \in [-1, 1], \quad \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\pi,$$

und wegen $\sin(\pi - x) = \sin x$ gilt:

$$\arcsin_1 x = \pi - \arcsin x.$$

Kehrt man auf dem Intervall $J_k = [(k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi]$ um, so erhält man den $k$-ten Nebenzweig des Arkussinus, $\arcsin_k x$, und wegen $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ folgt:

$$\arcsin_k x = k\pi + (-1)^k \arcsin x.$$

Die Funktion $y = \cos x$ ist auf dem Intervall $I_0 = [0, \pi]$ streng monoton wachsend und besitzt dort als Umkehrfunktion den *Arkuskosinus* (Hauptzweig):

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Wegen $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ folgt

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Die Schaubilder der Umkehrfunktionen erhält man aus denen der Ursprungsfunktionen durch Spiegelung an der Geraden $y = x$.

# Kapitel 4

# Differentialrechnung

**Definition 4.1** *Es sei $f$ auf $(a,b)$ definiert und $x_0 \in (a,b)$, dann nennt man*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0)$$

Differenzenquotienten von $f$.

*$f$ heißt* im Punkt $x_0$ differenzierbar *(kurz:* diffbar*), wenn*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - x_0}{h}$$

*existiert. $f'(x_0)$ nennt man dann die* Ableitung von $f$ in $x_0$.

*Linksseitige Ableitung:* $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

*Rechtsseitige Ableitung:* $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

*$f$ wird* auf $(a,b)$ differenzierbar *(kurz:* diffbar*) genannt, wenn $f$ in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ diffbar ist; dann stellt $f'(x)$ auf $(a,b)$ eine Funktion dar, die* erste Ableitung von $f$.

*Ist $f'$ auf $(a,b)$ diffbar, so nennt man $(f'(x))' = f''(x)$ die* zweite Ableitung von $f$.

*Allgemein: $f^{(k)}(x)$:* $k$-te Ableitung von $f$.

*Schreibweisen:*

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x).$$

**Definition 4.2** *$f$ heißt* stetig differenzierbar auf $(a, b)$, *wenn $f'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ existiert und stetig auf $(a, b)$ ist.*

Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig diffbar, so besitzt das Schaubild von $f$ in jedem Punkt $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$ eine Tangente und $f'(x_0)$ ist gleich der Steigung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ (s. Abb. 4.1).

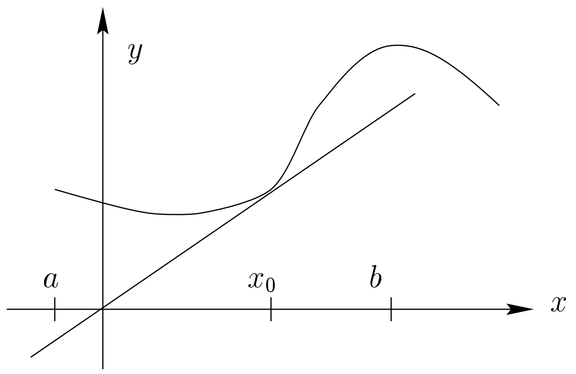


Abbildung 4.1: Tangente an eine Funktion

Gleichung der Tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Differentielle Schreibweise: $df = f'(x_0)dx$.

## 4.1 Ableitungsregeln

**Satz 4.3** *Es seien $f, g$ auf $[a, b]$ diffbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

1. *$\alpha f + \beta g$ ist auf $[a, b]$ diffbar und $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$,*
2. *$f \cdot g$ ist auf $[a, b]$ diffbar und $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$* (Produktregel),
3. *Besitzt $g$ nur endlich viele Nullstellen auf $[a, b]$, so ist $\frac{f}{g}$ außerhalb der Nullstellen von $g$ diffbar und es gilt:*
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}. \quad \text{(Quotientenregel)}$$
4. *Es gelte $f : [a, b] \to [A, B]$ sei diffbar auf $[a, b]$ und $h$ diffbar auf $[A, B]$. Dann ist die Funktion $h(f(x))$ auf $[a, b]$ diffbar und es gilt die* Kettenregel*:*
$$[h(f(x))]' = h'(f(x)) \cdot f'(x).$$

## 4.2 Ableitung einer Umkehrfunktion

**Satz 4.4** *Ist $f : [a, b] \to [A, B]$ diffbar auf $[a, b]$ und umkehrbar, ist $g$ die Umkehrfunktion zu $f$, so gilt $x = g(f(x))$ für alle $x \in [a, b]$ und somit ist auch $g$ diffbar. Außerdem gilt: $1 = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ und somit*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textit{bzw.} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(x) \neq 0,\ f'(g(x)) \neq 0.$$

## 4.3 Ableitungen der elementaren Funktionen

### 4.3.1 Konstante Funktion

$f(x) = c,\ c$ Konstante $\Rightarrow \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \Longrightarrow f'(x) \equiv 0.$

### 4.3.2 Polynome

$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{h}((x+h)^n - x^n) = \binom{n}{1} \cdot x^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^{k-1} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$

Aus der Ableitungsregel 1. folgt dann, daß jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ auf $\mathbb{R}$ diffbar ist und es gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Ebenso ist dann jede rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ außerhalb der Polstellen diffbar (Quotientenregel):

$$R'(x) = \frac{P'(x) \cdot Q(x) - P(x) \cdot Q'(x)}{Q(x)^2}.$$

### 4.3.3 Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$. Wegen $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}(e^{x+h} - e^x) = e^x \frac{e^h - 1}{h}$ und $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 \Longrightarrow f'(x) = e^x$.

### 4.3.4 Hyperbelfunktionen

$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$,
$g(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$,
also $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$.
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Longrightarrow (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$,
$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Longrightarrow (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$.

### 4.3.5 Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x$, dann gilt $f(x+2h) - f(x) = \sin(x+2h) - \sin x = 2\cos(x+h)\sin h$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = \lim_{h\to 0} \cos(x+h)\frac{\sin h}{h}$$

und wegen $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ und $\lim_{h\to 0} \cos(x+h) = \cos x \Longrightarrow$

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

$g(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\cos x)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, also

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow (\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow (\cot x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

### 4.3.6 Natürlicher Logarithmus, allgemeine Potenz, Wurzelfunktionen

Aus $x = e^{\ln x} \Rightarrow 1 = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' \Rightarrow 1 = x(\ln x)',\ x > 0 \Longrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Es gilt: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0$.
Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0) \Longrightarrow (a^x)' = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$.
Wegen $x^a = e^{a \ln x}$ $(x > 0) \Rightarrow (x^a) = \frac{a}{x}e^{a \ln x} = \frac{a}{x}x^a \Longrightarrow (x^a)' = ax^{a-1},\ x > 0,\ a \in \mathbb{R}$.

Ist insbesondere $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0.$$

Ist $n$ ungerade und $x < 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$

$$\Longrightarrow (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

### 4.3.7 Areafunktionen

Aus $x = \sinh(\operatorname{arsinh} x) \Rightarrow 1 = \cosh(\operatorname{arsinh} x) \cdot (\operatorname{arsinh} x)'$. Wegen $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh x} \Rightarrow 1 = \sqrt{1 + x^2}\,(\operatorname{arsinh} x)'$.

$$\Longrightarrow (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Analog:

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1 \\ (\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1 \\ (\operatorname{arcoth} x)' &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

### 4.3.8 Arkusfunktionen

Wegen $x = \tan(\arctan x) \Rightarrow 1 = (1 + \tan^2(\arctan x))(\arctan x)' \Longrightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
Wegen $x = \sin(\arcsin x) \Rightarrow 1 = \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)'$ und da $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$ (für $|x| < 1$) $\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Wegen $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

$$\Longrightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

### 4.3.9 Tabelle der Ableitungen der elementaren Funktionen

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^a,\ a \in \mathbb{R}$ | $ax^{a-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x,\ a > 0$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ |
| $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$ |
| $\operatorname{arsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\operatorname{arcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |
| $\cot x$ | $\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| $\ln \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

Ist $f(x) > 0$, so gilt

$$(f(x))^{g(x)} := e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}.$$

**Logarithmische Ableitung:**

$$f(x) > 0 \Longrightarrow [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

## 4.4 Sätze über differenzierbare Funktionen

**Satz 4.5** *Ist $f$ auf $[a, b]$ diffbar $\Longrightarrow$ $f$ ist auf $[a, b]$ stetig.*

**Beweis:** Ist $x_0 \in [a, b] \Rightarrow$ (wegen $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$): $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varphi(x)$, mit $\lim_{x\to x_0} \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow f$ stetig. □

**Definition 4.6** *Es sei $f$ auf $[a, b]$ definiert, $x_0 \in (a, b)$. $f$ besitzt im Punkt $x_0$ ein* relatives $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, *wenn ein $\alpha > 0$ existiert mit* $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{array} \right\}$ *für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \alpha$.*

*$f$ besitzt in $x_0$ ein* relatives Extremum *bedeutet: $f$ besitzt bei $x_0$ entweder ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum.*

**Definition 4.7** *$f$ besitzt in $x_0 \in [a,b]$ ein* absolutes $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, *wenn für alle $x \in [a,b]$ gilt:* $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{array} \right\}$. *Wird das* $\left\{ \begin{array}{c} Maximum \\ Minimum \end{array} \right\}$ *in $a$ oder in $b$ angenommen, so nennt man dies ein* Rand-$\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$.

Es gilt (siehe Zwischenwertsatz 3.30):

**Satz 4.8** *Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so besitzt $f$ auf $[a,b]$ sowohl ein absolutes Maximum als auch ein absolutes Minimum.*

**Satz 4.9** *Ist $f$ auf $[a,b]$ diffbar und besitzt $f$ bei $x_0 \in (a,b)$ ein relatives Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

**Beweis:** Es habe $f$ in $x_0$ ein relatives Maximum, dann gilt für alle $x$ nahe bei $x_0$: $f(x) - f(x_0) \leq 0$, also

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ für } x > x_0 \\ \geq 0 \text{ für } x < x_0 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$

Analog für relatives Minimum. □

Nullstellen von $f'(x)$ werden *stationäre Stellen* bzw. *kritische Punkte* genannt.

**Satz 4.10 (Satz von Rolle)** *Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, auf $(a,b)$ diffbar und $f(a) = f(b) = 0$, dann existiert ein $\eta \in (a,b)$ mit $f'(\eta) = 0$.*

**Beweis:** Da $f$ stetig und $f(b) = f(a) = 0$, ist entweder $f \equiv 0 \Rightarrow f' \equiv 0$, oder $f$ besitzt mindestens ein relatives Extremum bei einem $\eta \in (a,b) \Rightarrow f'(\eta) = 0$. □

**Satz 4.11 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** *Sind $f, g$ auf $[a,b]$ stetig und auf $(a,b)$ diffbar, $g'(x) \neq 0$ auf $(a,b)$ und $g(a) \neq g(b)$, dann existiert mindestens ein $\eta \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

**Beweis:** Seien für $h(x) = f(x) + \alpha g(x) + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow f(a) + \alpha g(a) + \beta = 0,\ f(b) + \alpha g(b) + \beta = 0.$

$$\alpha = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad \beta = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(b)}{g(b) - g(a)},$$

$\Rightarrow$ (Satz von Rolle) es existiert ein $\eta \in (a, b)$ mit

$$h'(\eta) = f'(\eta) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\eta) = 0 \overset{g'(\eta) \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

□

Setzt man $g(x) = x$, dann erhält man den

**Satz 4.12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** *Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig und auf $(a, b)$ diffbar, dann existiert ein $\eta \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta).$$

# 4.5 Anwendungen

## 4.5.1 Kurvenverlauf

Ist $f$ auf $[a, b]$ diffbar und $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ auf $[a, b]$ und besitzt $f'$ nur endlich viele Nullstellen $\Longrightarrow f$ ist auf $[a, b]$ streng monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$.

**Definition 4.13** *Die Funktion $f$ wird auf $[a, b]$* konvex *genannt, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt*

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1 - t)x_2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

*(Geometrisch bedeutet dies, daß das Schaubild von $f$ zwischen zwei Punkten $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ unterhalb der diese Punkte verbindenden Strecke verläuft (s. Abb. 4.1). Man sagt dann auch, das Schaubild ist auf $[a, b]$* links gekrümmt*.)*

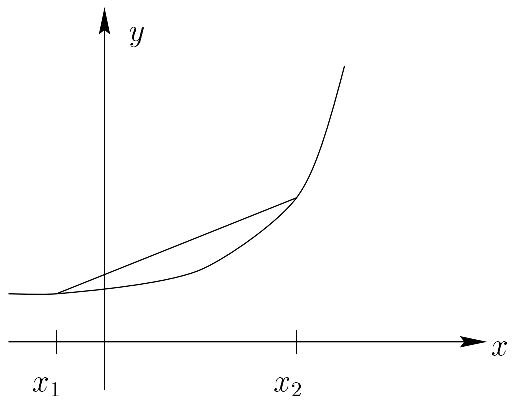


Abbildung 4.2: Konvexe Funktion

**Satz 4.14** *Es gilt: Ist $f$ auf $[a, b]$ diffbar und ist $f'(x)$ auf $[a, b]$ monoton wachsend, dann ist $f$ auf $[a, b]$ konvex.*

*Existiert $f''(x)$ auf $[a, b]$ und ist dort $f''(x) \geq 0 \Longrightarrow f$ ist auf $[a, b]$ konvex.*

**Definition 4.15** *$f$ wird auf $[a, b]$* konkav *genannt $\Longleftrightarrow$ $-f$ (d. h. $-f(x)$) ist auf $[a, b]$ konvex.*

*Ist $f$ auf $[a, b]$ konkav, so sagt man: das Schaubild von $f$ ist auf $[a, b]$* rechtsgekrümmt.

Ist $f''(x) \leq 0$ auf $[a, b]$, dann ist $f$ auf $[a, b]$ konkav.

### 4.5.2 Relative Extremwerte

**Satz 4.16** *Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig diffbar und besitzt $f'(x)$ höchstens endlich viele Nullstellen auf $[a, b]$ und ist $x_0 \in (a, b)$, dann gilt:*

$$f \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein relatives } \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow f'(x_0) = 0 \text{ und es gilt für alle } x$$

$$\text{nahe bei } x_0 \left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ für } x < x_0,\ f'(x) < 0 \text{ für } x > x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ für } x < x_0,\ f'(x) > 0 \text{ für } x > x_0 \end{array} \right\}.$$

*Wechselt $f'(x)$ bei $x_0$ nicht das Vorzeichen, so liegt ein* Sattelpunkt *vor.*

*Ist $f$ auf $[a, b]$ zweimal stetig diffbar, $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, dann gilt:*

*Ist $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ besitzt in $x_0$ ein relatives Minimum,*

*ist $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ besitzt in $x_0$ ein relatives Maximum,*

*$f''(x_0) = 0$: keine Aussage.*

### 4.5.3 Regel von de l'Hospital

**Satz 4.17** *Sind $f, g$ auf $[a,b]$ stetig und gilt für $x_0 \in [a,b]:\ f(x_0) = g(x_0) = 0$ und sind $f, g$ auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ diffbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x$ nahe bei $x_0$, dann gilt:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{wenn } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [a,b]}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{existiert.}$$

**Beweis:** Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}, \quad \text{für } \eta \text{ gilt: } |\eta - x_0| < |x - x_0|.$$

Wenn nun $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ existiert $\Rightarrow$ (wegen $|\eta - x_0| < |x - x_0|$), daß auch $\eta \to x_0$ strebt und damit $\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$ auch gegen $a$ strebt, damit gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$. $\square$

Es gilt weiterhin:

**Satz 4.18** *Sind $f, g$ auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ diffbar ($x_0 \in [a,b]$) und $g'(x) \neq 0$ für alle $x$ nahe bei $x_0$, besitzen $f, g$ die uneigentlichen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x) = \overset{+}{\scriptstyle(-)}\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \overset{+}{\scriptstyle(-)}\infty$, so gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{wenn } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{existiert.}$$

*Wenn $f, g$ auf $\left\{ \begin{array}{c} (a, +\infty) \\ (-\infty, b) \end{array} \right\}$ diffbar und*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0, \ \text{oder} \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0, \ \text{oder} \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty \end{array} \right\}$$

*und $g'(x) \neq 0$ für alle $x$ mit $|x|$ genügend groß, dann gilt*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right\}, \text{ falls der rechte Grenzwert existiert.}$$

**Unbestimmte Ausdrücke:**

Es sei stets $x_0 \in [a,b]$, $f, g$ diffbar auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$.

1. „$0 \cdot \infty$“: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, so kann man

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{bzw.} \quad = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

   setzen, so daß die Regel von de l'Hospital anwendbar ist.

   Ist $h(x)$ stetig auf dem Bildbereich von $f$, dann gilt $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x\to x_0} f(x))$, falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert.

2. „$0^0$“: Ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $f(x) > 0$ für $x$ nahe bei $x_0 \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

   Man kann dann $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)$ (nach 1.) so umformen, daß wieder die Regel von de l'Hospital anwendbar ist.

3. „$1^\infty$, $\infty^0$“: Analog wie unter 2. werden auch folgende Fälle behandelt:

   (a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$

   (b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

4. „$\infty - \infty$“: Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \overset{+}{\underset{(-)}{}}\infty$, dann kann man

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

   setzen.

   (Meist sind in diesem Fall $f$ und $g$ als Brüche gegeben, dann sollte man $f(x) - g(x)$ als Bruch zusammenfassen, da dann die Regel von de l'Hospital direkt anwendbar ist.)

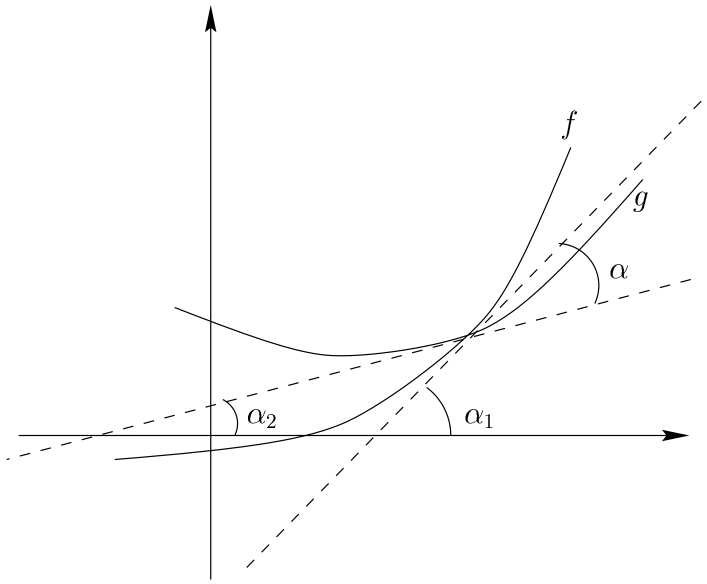


Abbildung 4.3: Schnittwinkel zwischen Kurven

### 4.5.4 Schnittwinkel zwischen Kurven

Sind $f, g$ auf $[a, b]$ stetig diffbar, dann besitzen ihre Schaubilder in jedem Punkt eine Tangente. Schneiden sich die Schaubilder für $x = x_0$, so nenn man den Winkel $\alpha$ zwischen den Tangenten an $f$ und $g$ in $(x_0, f(x_0))$ den *Schnittwinkel zwischen $f$ und $g$* (Abb. 4.3).

Wegen $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2,\ \tan\alpha_1 = f'(x_0),\ \tan\alpha_2 = g'(x_0) \Longrightarrow$

$$\tan\alpha = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \quad \text{für } f'(x_0)g'(x_0) \neq -1.$$

Es ist $f'(x_0)g'(x_0) = -1$, d. h. $g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \iff f$ und $g$ schneiden sich senkrecht.

### 4.5.5 Einfache Iteration und Newton-Verfahren

1. **Einfache Iteration:**

   Das *Nullstellenproblem* $f(x) = 0$ läßt sich stets in ein sogenanntes *Fixpunktproblem* $x = g(x)$ umwandeln, z. B. durch $x = x + \alpha f(x) = g(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$. $\overline{x}$ ist Lösung von $x = g(x) \iff \overline{x} = g(\overline{x})$.

   Ist $x_0$ eine grobe Näherung für $\overline{x}$, so setzt man $x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1), \ldots, x_{n+1} = g(x_n), \ldots$.

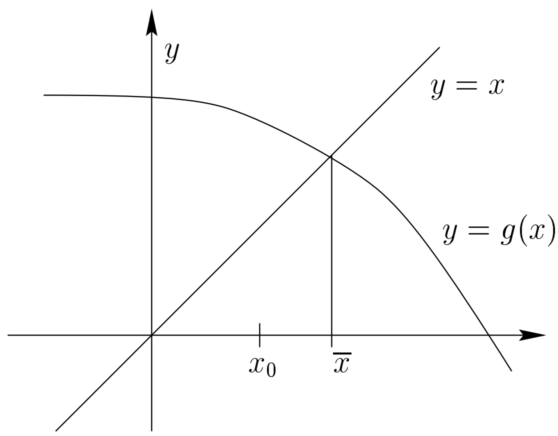


Abbildung 4.4: Einfache Iteration

**Satz 4.19** *Ist $g$ diffbar, dann gilt:*

*Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen $\overline{x}$, wenn $|g'(x)| \leq q < 1$ auf einem Intervall $J$ ist, das alle $x$ mit $|x - \overline{x}| \leq |x_0 - \overline{x}|$ enthält.*

2. Newton**verfahren:**

Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig diffbar, besitzt $f$ auf $[a, b]$ eine gesuchte Nullstelle $\overline{x}$ und ist $x_0$ eine grobe Näherung von $\overline{x}$, so kann man $y = f(x)$ durch die Tangente in $(x_0, f(x_0))$ (wenn $f'(x_0) \neq 0$) ersetzen, und den Schnittpunkt $x_1$ der Tangente mit der $x$-Achse als neue Näherung für $\overline{x}$ nehmen:

Tangentengleichung: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ y = 0 \Rightarrow -f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Setzt man dies fort, d. h. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \ldots$, so erhält man allgemein

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

**Satz 4.20 (Hinreichende Bedingung für $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$)** *Ist $f$ auf $[a, b]$ zweimal diffbar, gilt*

$$\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq q < 1 \text{ für alle } x \text{ mit } |x - \overline{x}| \leq |x_0 - \overline{x}|,$$

*so konvergiert $\{x_n\}$ gegen $\overline{x}$.*

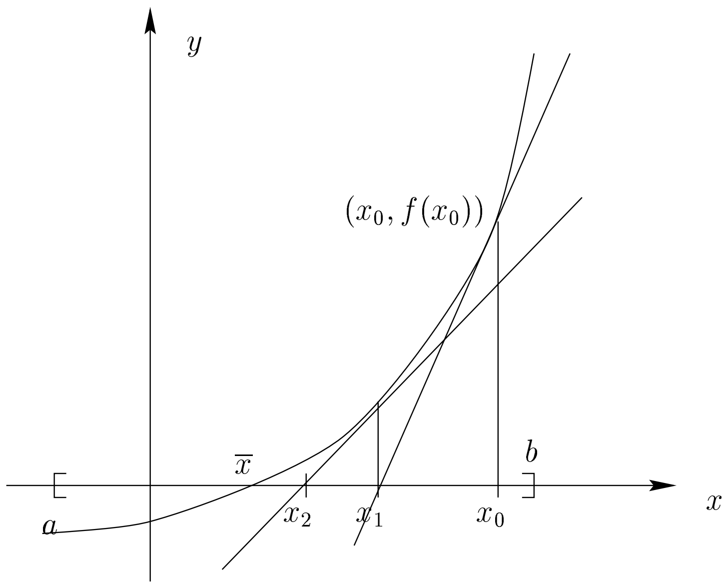


Abbildung 4.5: Newtonverfahren

# Kapitel 5

# Integralrechnung

## 5.1 Riemannsummen, bestimmtes Integral

Es wird hier nur für stückweise stetige Funktionen das Riemann-Integral eingeführt.

**Definition 5.1** *$f$ heißt auf $[a,b]$* stückweise stetig, *wenn $f$ auf $[a,b]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt.*

**Definition 5.2** *Es sei $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine* Zerlegung $z_n$ *des Intervalls $[a,b]$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.*

*Die Zerlegung $z_m$ $(m > n)$ wird* Verfeinerung *der Zerlegung $z_n$ genannt, wenn $z_m$ jedem Teilpunkt von $z_n$ enthält.*

**Definition 5.3 (Riemannsumme)**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)\Delta x_k, \quad x_k \le \eta_k \le x_{k+1}$$

*wird* Riemannsumme zur Zerlegung $z_n$ *genannt.*

*Ist für alle $k = 0,1,\ldots,n-1$ $\quad f(t_k) = \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}}\{f(x)\}$, so nennt man*

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k$$

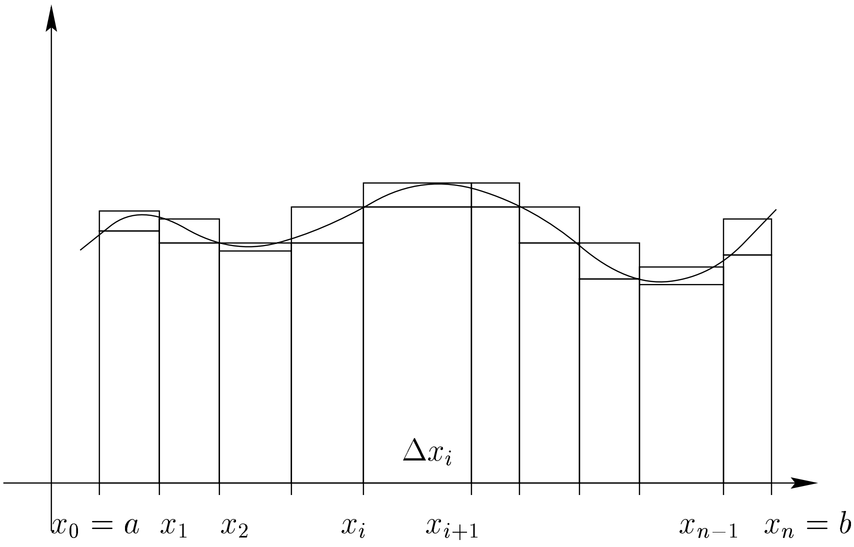


Abbildung 5.1: Riemannsumme

Obersumme, *ist für alle* $k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad f(s_k) = \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}}\{f(x)\}$, *so nennt man*

$$\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\Delta x_k$$

Untersumme.

Ist nun $f$ auf $[a, b]$ beschränkt und stückweise stetig, ist $\{z_n\}$ eine beliebige Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, so daß mit $\Delta_n x = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n x = 0$ gilt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n =: S,$$

unabhängig von der Wahl der Unterteilungsfolge $\{z_n\}$. $S$ wird das *Riemannintegral von* $f$ *auf* $[a, b]$ genannt. Bezeichnung:

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ist $f(x) \ge 0$ auf $[a, b]$ und dort stetig, so erhält man mit $\int_a^b f(x)\, dx$ den Inhalt der durch $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ gegebenen Fläche.

$\int_a^b f(x)\, dx$ nennt man das *bestimmte Integral von* $f$ *auf* $[a, b]$. $a$ wird *untere Grenze*, $b$ *obere Grenze* genannt.

**Satz 5.4** *Für das bestimmte Integral gilt:*

1. $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$,
2. *Ist* $a < c < b \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$,
3. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$,
4. $f(x) \geq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$,
5. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, *wenn* $b > a$.

**Satz 5.5 (1. Mittelwertsatz)** *Ist* $f$ *stetig auf* $[a,b]$, *dann gilt mit* $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$:

1. $m_1(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq m_2(b-a)$,
2. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\eta)$ *für ein* $\eta$ *mit* $a < \eta < b$.

Für alle $x \in [a,b]$ sei

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

dann ist $F$ eine Funktion auf $[a,b]$.
Es gilt nun

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Ist $f$ stetig auf $[a,b]$, dann folgt aus dem 1. Mittelwertsatz

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\eta)\Delta x, \quad \text{mit } |\eta - x| < |\Delta x|$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Damit erhält man den

**Satz 5.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** *Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, $x \in [a,b]$, so ist die Funktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*auf $[a,b]$ diffbar und es gilt:*

$$F'(x) = f(x).$$

Man kann also das Integral als Umkehrung der Ableitung auffassen.

Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so nennt man jede Funktion $F$ mit $F'(x) = f(x)$ auf $[a,b]$ eine *Stammfunktion zu $f$*. Sind $F_1, F_2$ Stammfunktionen zu $f$, so gilt $F_1'(x) - F_2'(x) \equiv 0$ auf $[a,b]$, also ist $F_1(x) - F_2(x) \equiv c$ auf $[a,b]$. Da mit $F'(x) = f(x)$ auch $(F(x)+c)' = f(x)$ gilt, ist die Stammfunktion zu $f$ bis auf eine additive Konstante $c$ eindeutig bestimmt.

Das Auffinden aller Stammfunktionen $F$ zu $f$ nennt man das *unbestimmte Integral:*

$$\int f(x)\,dx.$$

Ist $F$ eine Stammfunktion zu $f$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ zu bilden, bedeutet: Man bestimme alle Funktionen $F$ mit $F'(x) = f(x)$.

Indem man die Tabelle der Ableitungen der elementaren Funktionen „umgekehrt“ liest, erhält man somit die Grundintegrale:

| $f(x)$ | $F(x) = \int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $x^\alpha,\ \alpha \neq -1$ | $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$ |
| $x^{-1}$ | $\ln\lvert x\rvert + c$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $a^x,\ a \neq 0,1$ | $\frac{1}{\ln a}a^x + c$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x + c$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x + c$ |
| $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\tanh x + c$ |
| $\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $-\coth x + c$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\begin{cases} \operatorname{artanh} x + c, & \lvert x\rvert < 1, \\ \operatorname{arcoth} x + c, & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$ |

| $f(x)$ | $F(x) = \int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x + c$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\cot x + c$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{arsinh} x + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh} x + c$ |

Ebenso erhält man aus den Regeln zur Differentiation die folgenden Integrationsregeln:

**Satz 5.7** *1.* $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int f(x)\,dx$ (Linearität)

*2.* $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ (partielle Integration/Produktintegration)

*3.* $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,\ u = g(x),\ du = g'(x)\,dx$ (Substitutionsregel) *(d. h. ist $F$ Stammfunktion zu $f$, so ist $F(g(x))$ Stammfunktion zu $f(g(x))g'(x)$.)*

## 5.2 Spezielle Substitutionen

1. **Lineare Substitution:** Ist $a \neq 0$, dann gilt

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du,\ u = ax+b.$$

2. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$$

3. Ist $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$ eine rationale Funktion in $x$ und $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ und gilt $a\beta - \alpha b \neq 0$, so führt die Substitution $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ ($\Rightarrow x = \frac{b-\beta t^n}{\alpha t^n - a},\ dx = \frac{a\beta-\alpha b}{(\alpha t^n-a)^2}\cdot n t^{n-1}\,dt$) das Integral $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx$ in

$$\int R\left(\frac{b-\beta t^n}{\alpha t^n - a}, t\right)\frac{a\beta-\alpha b}{(\alpha t^n-a)^2}\cdot n t^{n-1}\,dt$$

über.

4. $\int R(e^x, \cosh x, \sinh x)\,dx$ wird durch die Substitution $t = e^x$ ($x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$) in das Integral über die rationale Funktion

$$\int R\left(t, \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\frac{dt}{t}$$

überführt.

5. $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$. Substitution $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\cdot \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = 2\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$,
$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,
$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2}) \Longrightarrow dx = 2\cdot\frac{dt}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 2\frac{dt}{1+t^2}$
ergibt das Integral

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

6. $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$. Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ergibt

$$\int R(\sin t, \cos t)\cos t\,dt.$$

7. $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$. Substitution $x = \sinh t \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \cosh t$, $dx = \cosh t\,dt$ ergibt

$$\int R(\sinh t, \cosh t)\cosh t\,dt.$$

8. $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$. Substitution $x = \cosh t$, $\sqrt{x^2+1} = \sinh t$, $dx = \sinh t\,dt$ ergibt

$$\int R(\cosh t, \sinh t)\sinh t\,dt.$$

## 5.3 Integration rationaler Funktionen

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine rationale Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ in einfache integrierbare rationale Funktionen zu zerlegen.

**Vorbemerkungen:**

Ist $Q(x)$ ein Polynom vom Grade $m \geq 1$, dann gilt:

**Satz 5.8 (Fundamentalsatz der Algebra)**
*$Q(x)$ mit* grad $Q = m \geq 1$ *besitzt genau $m$ Nullstellen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$.*

**Satz 5.9** *Ist $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, so gilt*

$$Q(x) = a_m(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_m).$$

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ und ist $z_k$ eine komplexe Nullstelle von $Q(x)$, dann gilt $0 = Q(z_k) = \sum_{j=0}^{m} a_j z_k^j$ und wegen $\overline{0} = 0,\ \overline{a}_j = a_j,\ j = 0, \ldots n$ folgt

$$0 = \overline{0} = \overline{Q(z_k)} = \sum_{j=0}^{m} a_j (\overline{z}_k)^j$$

$\Rightarrow \overline{z}_k$ ist ebenfalls Nullstelle von $Q$.
Also $Q(z_k) = 0 \iff Q(\overline{z}_k) = 0$, wenn $Q$ nur reelle Koeffizienten besitzt.
Wegen $(x - z_k)(x - \overline{z}_k) = x^2 - 2(\operatorname{Re} z_k)x + |z_k|^2 = x^2 + \alpha_k x + \beta_k$ mit $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, kann man damit jedes Polynom mit reellen Koeffizienten $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ in reelle Linearfaktoren: $x - x_l$ ($x_l$ reelle Nullstelle), oder quadratische Faktoren: $x^2 + \alpha_n x + \beta_k,\ z_k, \overline{z}_k$ Paar komplexer Nullstellen zerlegen.
Faßt man mehrfache Nullstellen zusammen, so erhält man

$$Q(x) = a_m(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_j)^{r_j}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{s_l},$$

$$r_1, \ldots r_j,\ s_1, \ldots s_l \in \mathbb{N},\ r_1 + r_2 + \ldots + r_j + 2(s_1 + \ldots + s_l) = m.$$

Ist nun $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($P, Q$ Polynome) eine rationale Funktion mit grad $P = n$, grad $Q = m$, so kann man, wenn $n \geq m$ ist, durch

$$R(x) = P(x) : Q(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

$R(x)$ in ein Polynom $P_1$ mit grad $P_1 = n - m$ und eine rationale Funktion $R_1(x) = \dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ mit grad $P_2 < m$ zerlegen.

Da Polynome einfach zu integrieren sind, ist im weiteren nur

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit } n < m$$

von Interesse.

(Haben $P$ und $Q$ gemeinsame lineare oder quadratische Faktoren, so kürzt man zunächst, da dann das Weitere weniger aufwendig ist!)

Ist nun $Q(x) = (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_j)^{r_j}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{s_l}$, dann existiert zu $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eine (eindeutig bestimmte) *Partialbruchzerlegung*:

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{k=1}^{r_\nu} \frac{A_{\nu,k}}{(x - x_\nu)^k} + \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{k=1}^{s_\mu} \frac{B_{\mu,k} x + C_{\mu,k}}{(x^2 + \alpha_\mu x + \beta_\mu)^k}$$

$A_{\nu,k}, B_{\mu,k}, C_{\mu,k} \in \mathbb{R}$.

Zur Berechnung der Partialbruchzerlegung macht man den Ansatz

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{k=1}^{r_\nu} \frac{A_{\nu,k}}{(x - x_\nu)^k} + \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{k=1}^{s_\mu} \frac{B_{\mu,k} x + C_{\mu,k}}{(x^2 + \alpha_\mu x + \beta_\mu)^k}$$

mit unbestimmten Koeffizienten $A_{\nu,k}, B_{\mu,k}$ und $C_{\mu,k}$, faßt dann die Partialbrüche zu einem gemeinsamen Bruch zusammen

$$\frac{\tilde{P}(x, A_{\nu,k}, B_{\mu,k}, C_{\mu,k})}{Q(x)}$$

und bestimmt die Konstanten durch Koeffizientenvergleich

$$P(x) = \tilde{P}(x, A_{\nu,k}, B_{\mu,k}, C_{\mu,k}).$$

Damit ist

$$\int R(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{k=1}^{r_\nu} A_{\nu,k} \int \frac{dx}{(x - x_\nu)^k} + \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{k=1}^{s_\mu} \int \frac{B_{\mu,k} x + C_{\mu,k}}{(x^2 + \alpha_\mu x + \beta_m)^k}\, dx.$$

**Berechnung der Integrale der Partialbrüche:**

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x_\nu} = \ln|x-x_\nu| + c,$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-x_\nu)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-x_\nu)^{k-1}} + c, \quad k \geq 2.$

3.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx+d}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{B(2x+\alpha)+2d-\alpha B}{x^2+\alpha x+\beta} \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2d-\alpha B}{(x+\frac{\alpha}{2})^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}}\,dx \\
&= \frac{B}{2}\ln(x^2+\alpha x+\beta) + (d-\frac{\alpha}{2}B)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(x+\frac{\alpha}{2})\right]^2+1}\,dx, \\
&\qquad \text{mit } \gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4}, \quad (\gamma > 0,\ \text{da } x^2+\alpha x+\beta \neq 0 \text{ in } \mathbb{R}) \\
&= \frac{B}{2}\ln(x^2+\alpha x+\beta) + \frac{2d-\alpha B}{\sqrt{\gamma}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\right] + c.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{bx+d}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{b(2x+\alpha)+2d-\alpha b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,dx \quad (k \geq 2), \\
&= -\frac{b}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{k-1}} + \frac{(2d-\alpha b)}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right]^k}}_{=\tilde{I}_k}.
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_k = \frac{1}{\gamma_k}\int \frac{dx}{\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2+1\right]^k} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{1}{\gamma^{k-1}}\underbrace{\int \frac{dt}{[t^2+1]^k}}_{I_k},$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right), \quad I_k = \int \frac{dt}{[t^2+1]^k}, \quad k \geq 2.$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
I_{k-1} &= \int 1 \cdot \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} \\
&\overset{\text{p.Int.}}{=} \frac{t}{(t^2+1)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2+(1-1)}{(t^2+1)^k}\,dt \\
&= 2(k-1)\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}\,dt}_{I_{k-1}} - 2(k-1)\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}}_{I_k} + \frac{t}{(t^2+1)^{k-1}}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Rekursionsformel: $(k \geq 2)$ $I_k = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$,

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1},$$

mit

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c.$$

**Bemerkung:** Gilt in $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$: $P(x) = a \cdot Q'(x)$, dann ist

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = a\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = a\ln|Q(x)| + c.$$

## 5.4 Weitere spezielle Integrale

Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.$$

1. $a > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a[x^2+2\alpha x+\beta]$ mit $\alpha = \frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow ax^2+bx+c = a[(x+\alpha)^2+\gamma]$ mit $\gamma = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$, $\alpha = \frac{b}{2a}$.
   Ist $\gamma = 0$, so ist

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x+\alpha| = \sqrt{a} \cdot \begin{cases} x+\alpha, & x \geq \alpha \\ -(x+\alpha), & x < \alpha \end{cases},$$

und das Integral $\int R(x, \sqrt{a}\,|x-\alpha|)\,dx$ ist für $x \geq \alpha$ und $x < \alpha$ jeweils das Integral über eine rationale Funktion.

Ist $\gamma \neq 0$, so ist

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a|\gamma|} \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{\sqrt{|\gamma|}}\right)^2 \pm 1}, \qquad \begin{array}{l} +,\text{wenn } \gamma > 0, \\ -,\text{wenn } \gamma < 0. \end{array}$$

Mit der Substitution

$$t = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}(x+\alpha),\ x = \sqrt{|\gamma|}\,t - \alpha,\ dx = \sqrt{|\gamma|}\,dt$$

folgt:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \int R(\sqrt{|\gamma|}\,t - \alpha, \sqrt{a|\gamma|}\,\sqrt{t^) \pm 1})\,dt.$$

Weiter: siehe 5.2.7 oder 5.2.8.

2. $a < 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = -|a|((x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$
$\Rightarrow ax^2+bx+c = |a|[\gamma - (x-\alpha)^2]$, mit $\alpha = \frac{b}{2|a|}$, $\gamma = \frac{1}{4|a|}(4|a|c+b^2)$.

Ist $\gamma \leq 0$, so ist $\sqrt{ax^2+bx+c}$ nicht reell (bis auf $x=\alpha,\ \gamma=0$), also kann $\gamma > 0$ vorausgesetzt werden.

$\Rightarrow ax^2+bx+c = |a|\gamma\left(1 - \left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\gamma}}\right)^2\right)$.

$\Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{|a|\gamma}\,\sqrt{1 - \left(\dfrac{x-\alpha}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}$.

Die Substitution

$$t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(x-\alpha),\ x = \alpha + \sqrt{\gamma}\,t,\ dx = \sqrt{\gamma}\,dt$$

führt zu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int R(\alpha + \sqrt{\gamma}\,t, \sqrt{|a|\gamma}\,\sqrt{1-t^2})\,dt.$$

Weiter: siehe 5.2.6.

# 5.5 Einige Anwendungen der Integralrechnung

## 5.5.1 Flächenberechnung

Sind $f, g$ stetig auf $[a, b]$ und ist $F$ die durch $a \leq x \leq b$ und die Schaubilder von $f$ und $g$ begrenzte Fläche, so erhält man für den Flächeninhalt von $F$: (vgl. Abb. 5.2)

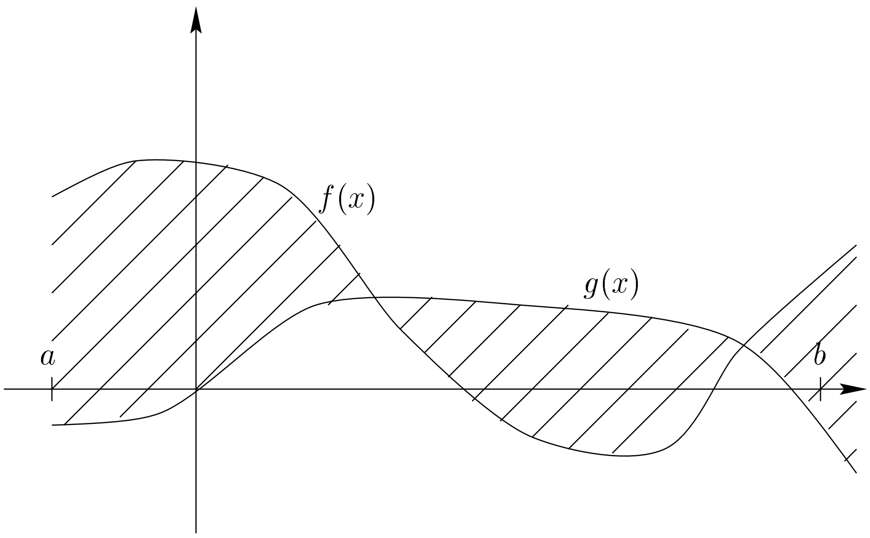


Abbildung 5.2: Flächeninhalt

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Gilt $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$, so ist

$$F = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

## 5.5.2 Flächenschwerpunkt

Sei $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$ und die Fläche $F$ durch die Schaubilder von $f$ und $g$ begrenzt. Ist $F$ mit einer homogenen Masse belegt, so erhält man die Koordinaten des Schwerpunktes von $F$, $S : (x_s, y_s)$:

$$x_s = \frac{1}{F} \int_a^b x(f(x) - g(x)) \, dx, \quad y_s = \frac{1}{2F} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$$

mit $F = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

### 5.5.3 Länge eines durch $y = f(x)$ gegebenen Bogens

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

### 5.5.4 Rotationskörper

Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig, $f(x) \geq 0$ und

1. $K_X$ der Körper, der durch Rotation des Schaubildes von $f$ um die $x$-Achse entsteht, dann gilt für das Volumen

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

2. $a \geq 0$ und $K_y$ der Körper bei Rotation um die $y$-Achse. Ist $f$ auf $[a,b]$ streng monoton und stetig diffbar, dann gilt:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\, dx.$$

3. Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig diffbar, so gilt für die Mantelfläche des Rotationskörpers bei Rotation um die $x$-Achse:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

### 5.5.5 Schwerpunkt eines Bogens

Ist der Bogen $\Gamma$ durch $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gegeben, $f$ stetig diffbar auf $[a,b]$ und ist $\gamma$ mit homogener Masse belegt, so gilt für die Kordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$:

$$x_s = \frac{1}{S(a,b)} \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \quad y_s = \frac{1}{S(a,b)} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

**1. Guldinsche Regel:** Rotiert die Kurve $\Gamma$ um eine Gerade, welche die Kurve $\Gamma$ nicht schneidet, so ist die Oberfläche des dabei entstehenden Rotationskörpers gleich dem Produkt aus der Länge der Kurve und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation durchläuft.

**2. Guldinsche Regel:** Rotiert eine Fläche $F$ um eine Gerade, welche die Fläche $F$ nicht schneidet, so ist das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt von $F$ und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt von $F$ bei der Rotation durchläuft.

### 5.5.6 Mittelwert einer Funktion

Ist $f$ stetig auf $[a,b]$, so ist der *Mittelwert von $f$ auf $[a,b]$:*

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

## 5.6 Mittelwertsätze, Taylorformel

**Satz 5.10 (Verallgemeinerter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, $g$ auf $[a,b]$ integrierbar und ohne Vorzeichenwechsel, dann existiert ein $\eta \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Beweis:** Es kann $g(x) \geq 0$ angenommen werden (anderenfalls wähle man $h(x) = -g(x)$). Ist $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, dann ist $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ auf $[a,b]$

$$\Rightarrow m\cdot\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

Mit $G = \int_a^b g(x)\,dx$ ist $G\cdot f(x)$ auf $[a,b]$ stetig und nimmt jeden Wert zwischen $mG$ und $MG$ an, also existiert ein $\eta\in(a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

**Satz 5.11 (2. Mittelwertsatz)** *Ist $f$ auf $[a,b]$ integrierbar und $g(x)$ auf $[a,b]$ monoton, dann existiert ein $\eta \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\eta f(x)\,dx + g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx.$$

**Satz 5.12 (Taylorformel)** *Ist $f$ auf $[a,b]$ $n+1$-mal stetig diffbar und $x_0 \in (a,b)$, dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x,x_0),$$

*mit*

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))$$

*mit einem $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$.*

**Beweis:** Es kann $x_0 = 0$ gesetzt werden. (Mit $g(x) = f(x_0+x)$ gilt $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$.)
Es ist dann $f(x) = \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt + f(0)$. Mit $u(t) = (t-x),\ u'(t) = 1$ erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + (t-x)f'(t)\Big|_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt. \end{aligned}$$

Mit $u(t) = (t-x),\ v(t) = f''(t)$ ergibt erneute partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x - \frac{1}{2}(t-x)^2 f''(t)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)\,dt. \end{aligned}$$

Setzt man dies fort, so folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Aus dem verallgemeinerten 1. Mittelwertsatz erhält man dann

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n+1)}(\vartheta x)\int_0^x (t-x)^n\,dt \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n+1)}(\vartheta x)\frac{1}{n+1}(t-x)^{n+1}\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}x^{n+1}f^{(n+1)}(\vartheta x),\ \text{mit } 0<\vartheta<1
\end{aligned}$$

Ersetzt man 0 durch $x_0$ und $x$ durch $x-x_0$, so folgt die allgemeine Taylorformel. □

## 5.7 Uneigentliche Integrale

**Definition 5.13** 1. *Ist $x_0 \in (a,b)$, $f$ auf $[a,b]\setminus\{x_0\}$ stückweise stetig und ist $f$ bei $x_0$ nicht beschränkt, so nennt man*

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0_+}\int_{x_0+\eta}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

*das* uneigentliche Integral von $f$ über $[a,b]$, *wenn beide Grenzwerte existieren.*

*Existiert*

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right] = ⨍_a^b f(x)\,dx,$$

*so nennt man* $⨍_a^b f(x)\,dx$ *den* Cauchyschen Hauptwert.

2. *Ist $f$ auf $[a,+\infty)$ (oder auf $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$) stückweise stetig und beschränkt, so wird*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral 2. Art *genannt, falls der Grenzwert existiert.*

*Ebenso:*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

## 5.8 Numerische Integration

Ist ein bestimmtes Integral nicht elementar zu berechnen oder nur sehr aufwendig zu lösen, so geht man zu numerischen Integrationsformeln über. Diese nennt man *Quadraturformeln.*

Die gängigen Quadraturformeln entstehen dadurch, daß man die zu integrierende Funktion $f$ auf $[a,b]$ (stückweise) durch Interpolationspolynome ersetzt und diese anstelle von $f$ integriert.

Quadraturformeln zu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$:

### 5.8.1 Trapezformel, Rombergverfahren

Man teilt das Intervall $[a,b]$ in $n$ gleichgroße Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$:

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h, \ldots, x_k = a + k\cdot h, \ldots, x_n = b,$$

und ersetzt $f(x)$ auf $[x_k, x_{k+1}]$ durch die interpolierende Gerade

$$y_k = f(x_k) + \frac{1}{h}(x-x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

$$\Longrightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} y_k\,dx = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})].$$

Wegen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

erhält man die Trapezformel

$$T_n(f) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}))], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$. $h = \frac{b-a}{n}$ heißt *Schrittweite.*

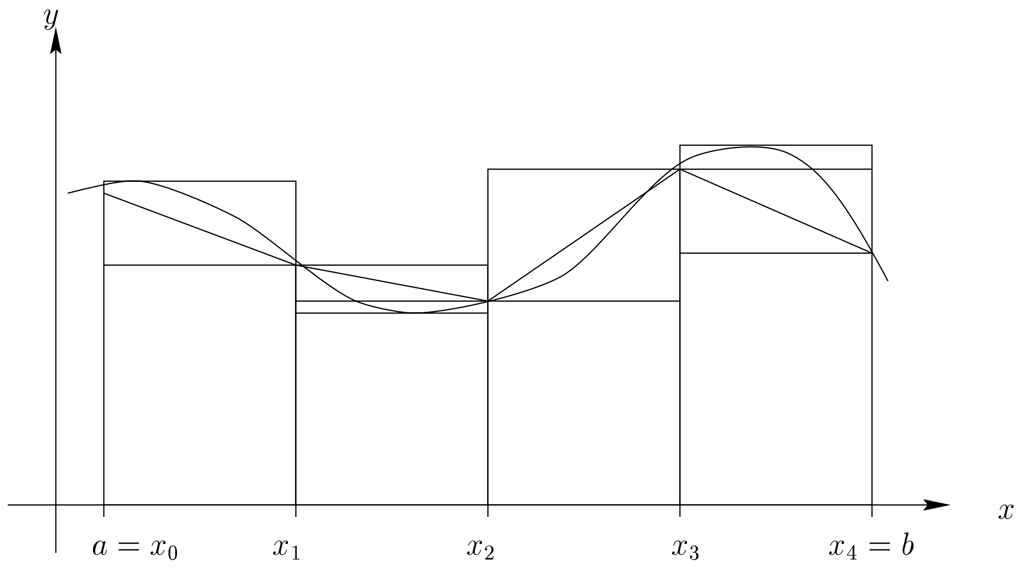


Abbildung 5.3: Trapezformel

**Fehlerbetrachtungen**

1. Sind $\overline{S}_n, \underline{S}_n$ die Riemannschen Ober- bzw. Untersummen zur Intervalleinteilung, so gilt $\underline{S}_n \leq T_n \leq \overline{S}_n$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

gilt.

2. Um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten, bildet man nicht für beliebige $n$ die Unterteilung $a = x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots, x_0 + nh$, sondern halbiert die Teilintervalle fortlaufend, d.h. man wählt $n = 1, 2, 4, \ldots 2^k, \ldots$. Das hat den Vorteil, daß man bei der Berechnung von $T_{2^{k+1}}(f)$ die schon bei $T_{2^k}(f)$ berechneten Funktionswerte benutzen kann und damit nur $2^k$ neue Funktionswerte berechnen muß.

3. **Konvergenzgüte:** Setzt man $H(x) = (x-x_k)(x-x_{k+1})$ für $x_k \leq x \leq x_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, und ist $f \in C^2[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b H(x)f''(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1})f''(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{k+1})f'(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(2x-x_k-x_{k+1})f'(x)\,dx \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}(2x-x_k-x_{k+1})f(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \\
&= -T_n(f) + \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Da $H(x) \geq 0$ auf $[a,b]$, folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$
\begin{aligned}
\int_a^b H(x)f''(x)\,dx &= f''(\eta)\int_a^b H(x)\,dx \\
&= f''(\eta)\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)(x-x_{k+1})\,dx \\
&\overset{\text{Subst. } \mathrm{u=x-x_k}}{=} f''(\eta)\cdot n\cdot\int_0^h u(u-h)\,dx \\
&= -\frac{1}{6}f''(\eta)\cdot nh^3.
\end{aligned}
$$

Mit $h = \frac{b-a}{n}$ erhält man daher die Fehlerformel:

$$
R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) = \frac{1}{6}f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{n^2}, \quad \eta \in (a,b).
$$

Ist nun $f$ $(2m+1)-$mal stetig diffbar auf $[a,b]$, dann gilt:

$$
R_n(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k h^{2k} + \tilde{R}_n(f,h),
$$

(mit $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\ 2m}}R_n(f,h) = 0$), wobei die $a_k$ nicht von $h$ abhängen.
Damit ist

$$
R_{2n}(f) = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{2^{2k}}h^{2k} + \tilde{R}_{2n}(f),
$$

also gilt mit $I = \int_a^b f(x)\,dx$:

$$\begin{aligned}
I &= T_n + R_n(f) = T_n + a_1 h^2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{a_k}{2^{2k}} h^{2k} + \tilde{R}_n(f), \\
4I &= 4(T_{2n} + R_{2n}(f)) = 4T_{2n} + a_1 h^2 + 4\sum_{k=2}^{m} \frac{a_k}{2^{2k}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + 4\tilde{R}_{2n}(f) \\
\Rightarrow 3I &= 4T_{2n} - T_n + \sum_{k=2}^{m} \frac{a_k}{2^{2k}} \left[4\left(\frac{h}{2}\right)^{2k} - h^{2k}\right] + 4\tilde{R}_n(f) - \tilde{R}_n(f).
\end{aligned}$$

Also ist $T_{n,1} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$ ein Verfahren der Ordnung $h^4$. Setzt man dies fort, also

$$\begin{aligned}
I &= T_{n,1} + \sum_{k=2}^{m} b_k h^{2k} + \hat{R}_n, \\
16I &= 16T_{2n,1} + 16\sum_{k=2}^{m} b_k \frac{h^{2k}}{2^{2k}} + \hat{R}_n, \\
\Rightarrow 15I &= 15T_{2n,1} + (T_{2n,1} - T_{n,1}) + \sum_{k=3}^{m} c_k h^{2k} + \overline{R}_n
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow T_{n,2} = T_{2n,1} + \frac{1}{15}(T_{2n,1} - T_{n,1})$ ist ein Verfahren der Ordnung $h^6$.

Dies führt zum **Rombergverfahren**:

| | | |
|---|---|---|
| $T_{0,0}$ | Trapezformel mit Schrittweite | $h = b - a$, |
| $T_{1,0}$ | " | $h = \frac{b-a}{2}$, |
| $T_{2,0}$ | " | $h = \frac{b-a}{4}$, |
| $\vdots$ | | |
| $T_{k,0}$ | " | $h = \frac{b-a}{2^k}$. |

$T_{j,1} = \frac{1}{3}(4T_{j,0} - T_{j-1,0}),\ j = 1, \ldots k,$

$T_{j,2} = \frac{1}{15}(16T_{j,1} - T_{j-1,1}),\ j = 2, \ldots, k$, allgemein:

$$T_{j,\mu} = \frac{1}{2^{2\mu} - 1}\left[2^{2\mu} T_{j,\mu-1} - T_{j-1,\mu-1}\right], \quad j = \mu, \ldots, k.$$

**Schema:**

$$
\begin{array}{ccccccc}
T_{0,0} & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \rightarrow & T_{2,2} & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}
$$

Bildet sich ein sogenanntes *Nest*, d. h. erscheint eine Gruppe von mindestens drei Werten $T_{\nu,\mu}$, die in der geforderten Stellenzahl übereinstimmen (z. B. $T_{3,1}, T_{3,2}, T_{3,3}$), so nimmt man diese $T_{\nu,\mu}$ als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Beispiel 5.14** $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\ \Delta I < 5 \cdot 10^{-4}$.

$$
\begin{aligned}
T_{0,0} &\approx \frac{1}{2}[1 + 0,3678794] \approx 0,6839397 \\
T_{1,0} &\approx \frac{1}{4}[1 + 2 \cdot 0,778808 + 0,3678794] \approx 0,7313703 \\
T_{2,0} &\approx \frac{1}{8}[1,3678794 + 2(0,9394131 + 0,778808 + 0,5697828)] \approx 0,74299841 \\
T_{3,0} &\approx \frac{1}{16}[1,3678794 + 2 \cdot 5,6508721] \approx 0,7458657
\end{aligned}
$$

Rombergverfahren:

| | 4/3 | 16/15 | 64/63 |
|---|---|---|---|
| 0,6839397 | | | |
| 0,7313703 | 0,7471805 | | |
| 0,7429841 | 0,7468554 | 0,7468337 | |
| 0,7458657 | **0,7468262** | **0,7468243** | **0,7468242** |
| ⋮ | | | |

$I \approx 0,7468$. □

Ist mit einem vorgegebenen $n$ keine genügende Genauigkeit erreicht, so fügt man weitere Trapezwerte hinzu, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

$$\begin{array}{cccc}
T_{0,0} & & & \\
T_{1,0} & T_{1,1} & & \\
T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
T_{n,0} & T_{n,1} & T_{n,2} & \\
\hline
T_{n+1,0} & \ddots & & \\
T_{n+2,0} & & \ddots &
\end{array}$$

### 5.8.2 Simpsonformel

Teilt man das Intervall $[a, b]$ in $n = 2m$ Intervalle der Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$, und ersetzt die Funktion $f$ auf den Intervallen $[x_{2\nu}, x_{2(\nu+1)}] \quad (x_\nu = a + \nu h)$ durch das Interpolationspolynom 2. Grades an den Stellen $x_{2\nu}, x_{2\nu+1}, x_{2\nu+2}$, so gelangt man zur *Simpsonformel* (vgl. Abb. 5.4)

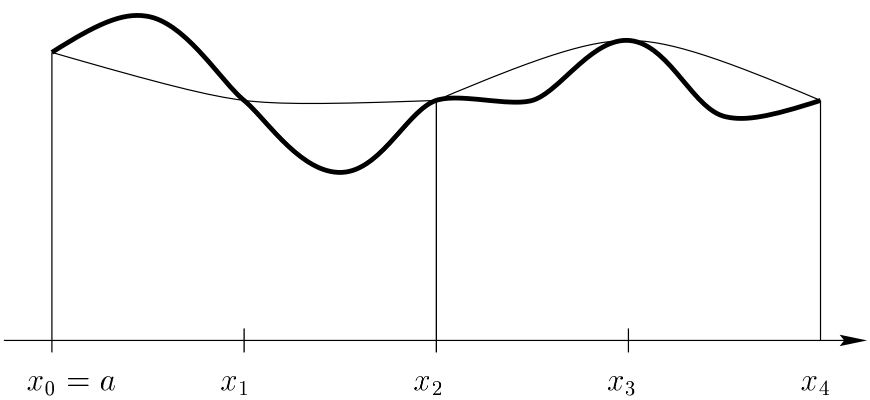


Abbildung 5.4: Simpsonformel

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[ f(a) + f(b) + 2\sum_{\nu=1}^{m-1} f(x_{2\nu}) + 4\sum_{\nu=0}^{m-1} f(x_{2\nu+1}) \right].$$

**Fehlerabschätzung:** Ist $f \in C^4[a, b],\ I = \int_a^b f(x)\,dx$, dann gilt $I = S_n(f) + R_n$ mit

$$|R_n| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}|f^{(4)}(\eta)|, \quad \eta \in (a, b).$$

Mit $h = \dfrac{b-a}{n}$ gilt also $|R_n| = c(f) \cdot h^4$, so daß das Simpsonverfahren von 4. Ordnung ist.

**Simpsonverbesserung:** (mit $s_n = s_n(f),\ s_{2n} = s_{2n}(f)$)

$$v_n = s_{2n} + \frac{1}{15}(16 s_{2n} - s_n).$$

**Bemerkung:** *Es gilt, wenn $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist: $s_n = T_{n,1},\ v_n = T_{n,2}$ ($T_{n,1}, T_{n,2}$: siehe Rombergverfahren).*

Die oben angegebene Fehlerabschätzung ist in der Praxis häufig unbrauchbar, deshalb benutzt man die heuristische (mathematisch i. a. nicht korrekte) Fehlerabschätzung

$$\Delta_n = \frac{1}{15}|s_{2n} - s_n|,$$

d. h. ist $\Delta_n$ kleiner als die vorgegebene Fehlertoleranz $\Delta I$, so nimmt man $s_{2n}$ als genügend genauen Näherungswert für $\int_a^b f(x)\,dx$.

# Kapitel 6

# Unendliche Reihen

## 6.1 Zahlenreihen

**Definition 6.1** *Sind* $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$*, so nennt man die Folge der Summen*

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1, \ldots, s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots$$

*eine* unendliche Reihe *und schreibt dafür*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

**Definition 6.2** *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist* konvergent *genau dann, wenn die Folge der Partialsummen* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *konvergent ist. Ist* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$*, so schreibt man*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

*Ist* $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$*,* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$*, so gilt* $\lim_{n\to\infty} |s_n - s| = 0$*; man nennt dann* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *den* Reihenrest *und es gilt dann* $\lim_{n\to\infty} |r_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n - s| = 0$.
*Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *nicht konvergent, dann nennt man* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen erhält man

**Satz 6.3** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\iff$ *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_0(\varepsilon)$ *mit* $|s_n - s_m| < \varepsilon$ *für alle* $n, m \geq n_0(\varepsilon)$.

$\Rightarrow$ ($\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$).

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen erhält man:

**Satz 6.4** *Ist* $s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ s_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, *dann gilt mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha s_1 + \beta s_2$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} a_k \cdot b_\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = s_1 \cdot s_2$.

**Definition 6.5** *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *wird* absolut konvergent *genannt, wenn* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

**Satz 6.6** *Da* $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ *monoton wachsend in* $n$ *ist, gilt:*
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist genau dann absolut konvergent, wenn* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *beschränkt ist.*

Damit erhält man den

**Satz 6.7 (Majoranten-(Minoranten-)Kriterium)** *Es sei ab einem* $n_0$: $0 \leq b_n \leq |a_n| \leq c_n$, ($n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$). *Dann gilt:*

1. *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ *konvergent* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist absolut konvergent,*
2. *ist* $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ *divergent* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist divergent.*

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, denn es gilt ($m \geq n$):

$$|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left|\sum_{k=0}^{m} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\right|.$$

**Definition 6.8** *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann nennt man* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent.

**Definition 6.9** *Man nennt die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *eine* Umordnung *der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, *wenn die Mengen* $\{b_j \mid j = 0, 1, \ldots\}$ *und* $\{a_k \mid k = 0, 1, \ldots\}$ *gleich sind (d. h. die* $a_k$ *in anderer Reihenfolge addiert werden).*

**Satz 6.10** *Es gilt:*

1. *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent und* $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, *dann gilt für jede Umordnung* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = s$.
2. *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *bedingt konvergent, so existiert zu jedem* $A \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *von* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *mit* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = A$.

**Die Geometrische Reihe**

Es ist (geometrische Summe):

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \in \mathbb{R}, q \neq 1.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ +\infty & \text{für } |q| > 1 \end{cases}$ gilt:

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist absolut konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$,

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist divergent für $|q| \geq 1$

## 6.2 Einige Konvergenzkriterien

Mit Hilfe des Majoranten-(Minoranten-)Kriteriums und der geometrischen Reihe erhält man das Quotienten- und das Wurzelkriterium.

**Satz 6.11 (Quotientenkriterium)** *Existieren zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$, mit $0 < q < 1$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für alle $n \geq n_0$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

*Existiert zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, dann gilt*

1. *Ist $0 \leq q < 1$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*
2. *Ist $q > 1$, dann ist die Reihe divergent.*
3. *Ist $q = 1$: keine Aussage über Konvergenz.*

*(Der Satz gilt allgemeiner mit $q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.)*

**Satz 6.12 (Wurzelkriterium)** *Existieren zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

*Existiert zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, dann gilt:*

1. *Ist $0 \leq q < 1$, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

2. *Ist $q > 1$, dann ist die Reihe divergent.*

3. *Ist $q = 1$: keine Aussage.*

**Beispiel 6.13** 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\cosh k}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{\cosh(n+1)} \cdot \frac{\cosh n}{2^n} = 2\frac{e^n+e^{-n}}{e^{n+1}+e^{-n-1}}$
$= \frac{2}{e}\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-2n-2}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\cosh k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ Reihe divergent.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$, keine Aussage.

□

Konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ konvergieren „schwächer“ als Reihen mit $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$.

Zur Untersuchung solcher Reihen ist manchmal das **Integralkriterium** nützlich:

**Satz 6.14** *Existieren zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine auf $[n_0, +\infty)$ definierte stetige, monoton gegen Null strebende Funktion $f(x)$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$) mit $f(k) = a_k$ für alle $k \geq n_0$, dann gilt:*
*$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent ($a \geq n_0$).*

**Beispiel 6.15** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent. □

## 6.3 Alternierende Reihen, Leibnizkriterium

**Definition 6.16** *Gilt für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$: $b_k \cdot b_{k+1} < 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$, dann wechselt $b_k$ beständig das Vorzeichen. Eine solche Reihe nennt man* alternierend.

*Man kann dann*

$$b_k = (-1)^k a_k$$

*setzen, wobei alle $a_k$ das gleiche Vorzeichen haben, also o.E. $a_k > 0$ annehmen.*

Bildet die Folge $a_k$ eine monoton fallende Nullfolge, so gilt mit $n > m$:

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= (-1)^{m+1}a_{m+1} + (-1)^{m+2}a_{m+2} + \ldots + (-1)^n a_n \\ &= (-1)^{m+1}(a_{m+1} - \underbrace{a_{m+2} + a_{m+3}}_{<0} - \underbrace{a_{m+4} + a_{m+5}}_{<0} \\ &\qquad - \ldots + (-1)^{n-m+1}a_{n-1} + (-1)^{n-m}a_n) \\ \Rightarrow |s_n - s_m| &\le a_{m+1} + a_n \end{aligned}$$

und da $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ ist konvergent.
Daher gilt:

**Satz 6.17 (Leibniz-Kriterium)** *Bilden in der alternierenden Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ die Glieder $a_k$ ab einem $n_0$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe. Außerdem gilt dann (für $n > n_0$) mit*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \ s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k : \quad |s - s_n| \le |a_{n+1}|,$$

*d. h. $|r_n| \le |a_{n+1}|$.*

## 6.4 Funktionenreihen

**Definition 6.18** *Die Funktionen $f_0(x), f_1(x), \ldots$ seien auf $[a, b]$ definiert. Dann nennt man*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

*eine* Funktionenreihe*.*

*Man nennt die Funktionenreihe* punktweise konvergent auf $[a, b]$*, wenn für jedes $x_0 \in [a, b]$ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ eine konvergente Reihe ist. Dann wird durch*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

*wieder eine Funktion auf $[a, b]$ definiert.*

*Die Funktionenreihe heißt auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von $x \in [a,b]$ unabhängiges) $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0(\varepsilon).$$

Es gilt:

**Satz 6.19** *Sind $f_0(x), f_1(x), \ldots$ stetig auf $[a,b]$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf $[a,b]$ stetig, außerdem gilt dann*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt$$

*für alle $x \in [a,b]$ und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt$ ist ebenfalls auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent.*

*Sind $f_0, f_1, \ldots$ auf $[a,b]$ stetig diffbar und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent und ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$ konvergent, dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent und es gilt:*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

*Gibt es zu jedem $f_k(x)$ ein $a_k \in \mathbb{R}$ mit $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle $x \in [a,b]$ und $k = 0,1,2,\ldots$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent.*

**Beispiel 6.20** $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos(kx)$.

Wegen $\left|\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right| \leq \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos(kx)$ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\int_a^b \cos(kx)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\sin(kx)\Big|_a^b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}[\sin(kb) - \sin(ka)]$. □

**Definition 6.21** *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ wird auf $[a,b]$* absolut konvergent *genannt, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ auf $[a,b]$ konvergiert.*

## 6.5 Potenzreihen

Ein wichtiger Typ einer Funktionenreihe ist die *Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad x_0 : \text{ Entwicklungszentrum, } a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Um Aussagen über die Konvergenz von Potenzreihen zu erhalten, wendet man Quotienten- und Wurzelkriterium an.

**Satz 6.22** *Setzt man $b_k = a_k(x-x_0)^k$, so besagt das Quotientenkriterium: Wenn*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}|}{|a_k(x-x_0)^k|} = |x-x_0|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x-x_0|\cdot q$$

*existiert, dann gilt:*

1. *Ist $|x-x_0|q < 1 \Rightarrow$ Konvergenz.*
2. *Ist $|x-x_0|q > 1 \Rightarrow$ Divergenz.*
3. *Ist $|x-x_0|q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.*

*Daraus folgt: Existiert $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$ (eigentlich oder uneigentlich), dann gilt:*

1. *Ist $q = 0$, dann konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ (auf jedem Intervall $[a,b]$ gleichmäßig).*
2. *Ist $0 < q < +\infty$, dann konvergiert die Potenzreihe für alle $x$ mit $|x-x_0| \le a < \frac{1}{q}$ gleichmäßig (bei festem $a < q^{-1}$) und divergiert für alle $x$ mit $|x-x_0| > \frac{1}{q}$.*
3. *Ist $q = +\infty$, so divergiert die Potenzreihe für alle $x \neq x_0$.*

Analog erhält man aus dem Wurzelkriterium:

**Satz 6.23** *Existiert $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = q$ ($q = +\infty$ ist zugelassen), dann gilt:*

1. *Ist $q = 0 \Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (gleichmäßig auf jedem Intervall $[a,b]$).*
2. *Ist $0 < q < +\infty \Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert für $|x-x_0| \le a < \frac{1}{q}$ gleichmäßig und divergiert für $|x-x_0| > \frac{1}{q}$.*

3. *Ist* $q = +\infty \Rightarrow$ *die Potenzreihe divergiert für alle* $x \neq x_0$.

**Bemerkung:** *Es ist stets* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$, *wenn die Grenzwerte existieren.*

**Definition 6.24** *Ist* $0 < q \leq +\infty$, *so nennt man* $r = \frac{1}{q}$ *den* Konvergenzradius *der Potenzreihe.*

*Ist* $q = 0$, *so sagt man, die Potenzreihe besitzt einen* unendlichen Konvergenzradius. $r = +\infty$.

Allgemein gilt:

Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, dann nennt man

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

den *Konvergenzradius* der Potenzreihe ($r = 0, +\infty$ zugelassen), und es gilt:

Die Potenzreihe konvergiert für alle $x$ mit $|x - x_0| < r$ und divergiert für alle $x$ mit $|x - x_0| > r$. Die Menge $\{x \mid |x - x_0| < r\}$ nennt man den *Konvergenzbereich* der Potenzreihe.

### 6.5.1 Eigenschaften von Potenzreihen

**Satz 6.25** *Eine Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzbereich eine beliebig oft differenzierbare Funktion* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *dar und es gilt dort:*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \ldots,$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdots(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j},$$

*wobei die Potenzreihen* $\sum_{k=j}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdots(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j}$ *stets den gleichen Konvergenzradius und Konvergenzbereich wie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *besitzen.*

Eine Potenzreihe darf man innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise integrieren, d. h. ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $r$ : Konvergenzradius, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b (x-x_0)^k\,dx,$$

wenn das Integrationsintervall im Konvergenzbereich liegt, also $x_0-r < a \leq b < x_0+r$ gilt.

Es ist

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (x-x_0)^{k+1},$$

und der Konvergenzradius der integrierten Reihe ist gleich dem der Ursprungsreihe.

**Beispiel 6.26** Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert für $|x| < 1$, und es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Damit ist (für $|x| < 1$)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + kx^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

$$f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Außerdem erhält man für $|x| < 1$:

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,dt = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k\,dt = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} t^{k+t}\Big|_0^x$$

$$\Longrightarrow \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Damit gilt z.B., wenn man $x = \frac{1}{2}$ einsetzt:

$$\ln 2 = -\ln\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$$

□

**Beispiel 6.27** Setzt man in der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad |q| < 1$$

$q = -t^2$ ein, so erhält man für $|t| < 1$:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

und damit

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } |x| < 1,$$

also

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Analog erhält man mit $q = t^2$:

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}, \quad |t| < 1,$$

$$\Rightarrow \operatorname{artanh} x = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } |x| < 1.$$

□

**Satz 6.28 (Identitätssatz für Potenzreihen)** *Ist* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)$ *für* $|x - x_0| < r$, *dann gilt dort*

$$g(x) = f(x) \text{ für alle } |x - x_0| < r \iff a_k = b_k \text{ für alle } k = 0, 1, 2, \dots.$$

Um den schreibtechnischen Aufwand zu verringern, setzen wir im folgenden $x_0 = 0$.

### 6.5.2 Rechenregeln für Potenzreihen

**Satz 6.29** *Ist* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, *Konvergenzradius* $r_1 > 0$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, *Konvergenzradius* $r_2 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$, *und für den Konvergenzradius* $r$ *der letzten Summe gilt:* $r \geq \min(r_1, r_2)$.

2. **(Cauchy-Produkt)**

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

*mit* $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, *Konvergenzradius* $r \geq \min(r_1, r_2)$.

3. *Ist* $b_0 \neq 0$ *(* $\iff g(0) \neq 0$*), dann gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

*mit einem Konvergenzradius* $r > 0$.

*Multipliziert man die Gleichung mit* $g(x)$, *so folgt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} d_j b_{k-j}) x^k$$

$$\Rightarrow a_k = \sum_{j=0}^{k} d_j b_{k-j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

*also gilt:*

$$\begin{array}{rclcrcl}
a_0 & = & d_0 \cdot b_0 & \Rightarrow & d_0 & = & \frac{a_0}{b_0} \\
a_1 & = & d_0 b_1 + d_1 b_0 & \Rightarrow & d_1 & = & \frac{1}{b_0}(a_1 - b_1 d_0) = \frac{1}{b_0}(a_1 - \frac{b_1 a_0}{b_0}) \\
a_2 & = & d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 & & \vdots & & \\
& \vdots & & & & & \\
\end{array}$$

$$a_k = d_0 b_k + d_1 b_{k-1} + \ldots + d_k b_0$$

$$\vdots$$

*woraus man nacheinander* $d_0, d_1, \ldots$ *aus den bekannten Koeffizienten* $a_k, b_k$ *berechnen kann*

**Beispiel 6.30** 1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \\
&= (1+x+x^2+\ldots)\cdot(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j}{j}\right)x^k \\
&= x+(1-\frac{1}{2})x^2+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3+\ldots,
\end{aligned}$$

Konvergenzradius: $r=1$.

2. $\frac{\arctan x}{1+\ln(1+x)} = d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\ldots.$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots &= (d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\ldots)(1+x-\frac{1}{2}x^2+\ldots) \\
&= d_1x+(d_2+d_1)x^2+(d_3+d_2-\frac{1}{2}d_1)x^3+\ldots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow d_1 = 1$
$d_2+d_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow d_2 = -\frac{1}{3}-d_1 = -\frac{4}{3}$
$d_3+d_2-\frac{1}{2}d_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow d_3 = \frac{1}{5}-d_2+\frac{1}{2}d_1 = \frac{1}{5}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2} = \frac{31}{30}$
$\vdots$

□

## 6.6 Taylorreihen

Ist die Funktion $f(x)$ durch die Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{für } |x-x_0|<r,\ r>0$$

gegeben, so gilt (wie wir sahen)

$$\begin{aligned}
f^{(j)}(x) &= \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j} \\
&= j!a_j+(j+1)j\cdots 2\cdot a_{j+1}(x-x_0)+\ldots
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{(j)}(x_0) = j! \cdot a_j \quad \text{bzw.} \quad a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

d. h. die Funktion $f$ ist unendlich oft bei $x_0$ differenzierbar und es gilt $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)$, also

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j.$$

Damit liegt es nahe, zu fragen, ob sich diese Betrachtung nicht umkehren läßt, d. h. :

Ist $f$ eine auf $[a, b]$ beliebig oft diffbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$, gilt dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

auf einem Bereich $B \subset [a, b]$?

Dies gilt i. a. nicht, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

zeigt, denn es ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$, aber

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k \equiv 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Jedoch läßt sich diese Frage für eine Reihe wichtiger Funktionen positiv beantworten. Dazu geht man von der Taylorformel aus.

Ist $f$ auf $[a, b]$ $\infty$-oft diffbar, $x_0 \in (a, b)$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

mit

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\eta_n).$$

Damit erhält man:

**Satz 6.31** *Es ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ für } |x-x_0| < r$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x-x_0| < r.$$

*Man nennt dann* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ *die* TAYLORreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0$.

*Ist* $x_0 = 0$*, so wird die Taylorreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

MAC-LAURIN-Reihe *genannt.*

## 6.7 Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen

### 6.7.1 $f(x) = e^x$

$f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1,\ k = 0,1,2,\ldots$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_n(x), \text{ mit } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\delta_n x},$$

mit $0 < \delta_n < 1$ für alle $n = 0,1,2,\ldots$.

Für alle $x$ mit $|x| \le m$ ($m > 0$ fest gewählt)

$$\Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{m^{n+1}}{(n+1)!}e^m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

und da $m > 0$ beliebig gewählt war

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

### 6.7.2 $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k x^k,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1} \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots
\end{aligned}$$

Analog:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} x^{2j} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

### 6.7.3 $f(x) = \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x, \ldots$, allgemein:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x,\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$$

$$\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

$\Rightarrow$ Taylorformel für $x_0 = 0$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + R_{2n+1}(x)$$

mit

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}(-1)^{n+1} \sin(\delta_n x), \quad 0 < \delta_n < 1$$

$$\Rightarrow |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach $x$, so erhält man

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 6.7.4 Binomische Reihe

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, dann gilt: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots$,

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \dots,$$

also

$$f(0) = 1 \text{ und } f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(a-k+1), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Damit erhält man (Taylorformel):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \alpha(\alpha-1)\cdots(a-k)(1+\delta x)^{\alpha-n-1}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Man definiert

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (\text{„}\alpha \text{ über } k\text{“})$$

und $\binom{\alpha}{0} = 1$, somit gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+\delta x)^{\alpha-n-1}.$$

Das Restglied $R_n(x)$ läßt sich in diesem Fall nicht so gut abschätzen wie in den vorhergehenden. Um zu sehen, ob (und wo)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

gilt, geht man folgendermaßen vor:
Die Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ besitzt die Koeffizienten $a_k = \binom{\alpha}{k}$. Nun ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(a-k+1)}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1 = q.$$

Damit besitzt die Potenzreihe $P(x)$ den Konvergenzradius 1 und für $|x| < 1$ gilt dann

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1}.$$

Multipliziert man mit $(1+x) \Rightarrow$

$$(1+x)P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k(x^{k-1} + x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^k.$$

Indem man in der ersten Summe (auf der rechten Seite) $k-1$ durch $k$ ersetzt, folgt:

$$\begin{aligned}(1+x)P'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1}(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^k \\ &= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}\right] x^k.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}&(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} \\ &= (k+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!} + k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(a-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}(\alpha-k+k) \\ &= \alpha\cdot\binom{\alpha}{k}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+x)P'(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha P(x).$$

$$\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{\alpha}{1+x} \text{ für } |x| < 1,$$

aber ebenso gilt mit $f(x) = (1+x)^\alpha$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

$\Rightarrow \ln P(x) = \ln f(x) + c$, also

$$(1+x)^\alpha = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Setzt man $x = 0$ ein, so folgt $1 = c_1$, also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für } |x| < 1. \quad \textbf{Binomische Reihe}$$

### 6.7.5 Arkus- und Areafunktionen

Mit Hilfe der binomischen Reihe lassen sich die Reihenentwicklungen der Arkus- bzw. Areafunktionen bestimmen:

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man in der binomischen Reihe $\alpha = -\frac{1}{2}$ und ersetzt $x$ durch $-t^2$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1+(-t^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}, \quad |t| < 1.$$

Damit folgt für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \int_0^x t^{2k}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k+1} \quad \text{für } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\operatorname{arsinh} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k+1} \text{ für } |x| < 1.$$

**Bemerkung:** Besitzt eine Funktion $f(x)$ für $|x - x_0| < r$ $(r > 0)$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

so ist dies natürlich ihre Taylorreihe an der Stelle $x_0$, d. h.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Insbesondere sind die oben angegebenen Reihenentwicklungen die Taylorreihen der Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$.

Will man eine gegebene ($\infty$ oft diffbare) Funktion $f$ in eine Taylorreihe entwickeln, so ist oft die Berechnung der Ableitungen $f^{(k)}(x)$ kompliziert und der notwendige Nachweis $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ in

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

recht schwierig, und man versucht deshalb, auf andere Weise zur Reihenentwicklung von $f(x)$ zu gelangen, z. B. durch Umformung bekannter Reihenentwicklungen (etwa Integration oder Differenzieren). Manchmal kann man auch einfache Substitutionen verwenden.

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$, dann besitzt die Funktion $F(x) = f(a \cdot x^m),\ a \neq 0,\ a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$ die Reihenentwicklung

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k \cdot x^{mk}$$

und die Reihe besitzt den Konvergenzradius

$$R = \sqrt[m]{\frac{r}{|a|}}.$$

**Beispiel 6.32** 1. $f(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},\ r = +\infty,\ F(x) = 2\cos(2x^3) \Rightarrow$

$$F(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x^3)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k)!} x^{6k}, \quad r = +\infty.$$

2. $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad r = 1.$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \ln \sqrt[3]{5 - x^2} \\
&= \frac{1}{3}\ln(5 - x^2) \\
&= \frac{1}{3}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln\left(1 - \frac{x^2}{5}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{5}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln 5 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{x^2}{5}\right)^k \\
&= \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^k} x^{2k}, \quad \left|-\frac{x^2}{5}\right| < 1 \iff |x| < \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R = \sqrt{5}$.

□

## 6.8 Einige Anwendungen von Reihenentwicklungen

### 6.8.1 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

Die Funktionswerte der transzendenten elementaren Funktionen $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ usw. lassen sich nur für wenige Werte $x$ exakt berechnen, z. B. $e^0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \ldots$, ansonsten kann man nur Näherungswerte bestimmen.

Eine häufig benutzte Möglichkeit ergibt sich aus der Potenzreihenentwicklung einer Funktion. Ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{für } |x - x_0| < r,\ r > 0,$$

so setzt man

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = s_n(x), \quad \text{für } |x - x_0| < r.$$

Die Abweichung vom wahren Funktionswert wird dann durch den Reihenrest

$$\Delta_n(x) = |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right|$$

gegeben.

Ist eine bestimmte Genauigkeit gefordert, d. h. soll $f(x_1)$ bis auf einen Fehler $\Delta$ genau berechnet werden, muß $n$ so groß gewählt werden, daß $|r_n(x_1)| < \Delta$ gilt.

**Beispiel 6.33** 1. Berechnung von $\sqrt{e}$ auf 6 Stellen nach dem Komma (d. h. $\Delta < 5 \cdot 10^{-7}$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! 2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! 2^k} + r_n.$$

$n$ ist so zu bestimmen, daß $|r_n| < 5 \cdot 10^{-7}$.

$$|r_n| \ = \ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k! 2^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \cdot \frac{1}{2^{k-n-1}} \\
&< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \\
&= \frac{1}{(n+1)!2^{n}}
\end{aligned}$$

$$|r_n| < 5 \cdot 10^{-7} \quad \text{wenn} \quad (n+1)! \cdot 2^n \cdot 5 > 10^7$$

Dies ist für $n = 7$ erfüllt, also

$$\begin{aligned}
\sqrt{e} &= \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!2^k} \pm 5 \cdot 10^{-7} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \frac{1}{46080} + \frac{1}{645120} \pm 5 \cdot 10^{-7} \\
&= 1,648721 \pm 5 \cdot 10^{-7}.
\end{aligned}$$

2. Berechnung der Zahl $\pi$.
   Es ist $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \pi = 6 \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \pi = 6 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}.$$

Da alternierendes Vorzeichen vorliegt und $\frac{1}{(2k+1)3^k}$ monoton gegen Null geht, ist hier die Abschätzung des Reihenrestes einfach (Leibniz-Kriterium). Es ist

$$|r_n| < \frac{1}{(2(n+1)+1)3^{n+1}} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Soll $\pi$ bis auf einen Fehler $\Delta < 5 \cdot 10^{-6}$ bestimmt werden, so ist $n$ so zu wählen, daß

$$\frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}} < 5 \cdot 10^{-6}, \quad \text{d. h.} \quad 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^6 < 5(2n+3)3^{n+1}$$

gilt. Man addiert nun so lange die Glieder der Reihe auf, bis das nächste Glied $< 5 \cdot 10^{-6}$ ist, dann bricht man ab.

$$\begin{aligned}
\pi &= 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243} + \frac{1}{13 \cdot 729}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{15 \cdot 2187} + \frac{1}{17 \cdot 6561} - \frac{1}{19 \cdot 19683}\right] \pm 5 \cdot 10^{-6} \\
&= 3,141591 \pm 5 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

□

### 6.8.2 Berechnung von Integralen

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $|x - x_0| < r$ und gilt $|a - x_0| < r$, $|b - x_0| < r$, dann ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b (x - x_0)^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (b^{k+1} - a^{k+1})$$

**Beispiel 6.34** $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}(e^{x^2} - 1)\, dx$ zu berechnen, $\Delta I < 5 \cdot 10^{-6}$.

$$\frac{1}{x}(e^{x^2} - 1) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{2k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot k!}$$

$$I = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k \cdot k!} + r_n,$$

$$|r_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2kk!} = \frac{1}{(2n+2)(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)}{kk!}$$

$$\Rightarrow |r_n| \leq \frac{1}{2(n+1)(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{(n+1)(n+1)!},$$

(da $\frac{n+1}{k} \leq 1$ und $\frac{(n+1)!}{(n+1+j)!} < \frac{1}{2^j}$).

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-6} \iff 5(n+1)(n+1)! > 10^6, \text{ gilt für } n = 7.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} + \frac{1}{35280}) \pm 5 \cdot 10^{-6} \\ &= 0,658949 \pm 5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

□

### 6.8.3 Näherungslösungen von Differentialgleichungen

Näheres siehe 2. Semester.

**Beispiel 6.35** Gesucht eine Funktion $f(x)$ mit

$$f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \ f'(0) = 0.$$

Ansatz für $f(x)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,\ f(0) = a_0 = 1,\ f'(0) = a_1 = 0,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + 2(k+1) a_k] x^k = 0.$$

$\Rightarrow a_2 = -a_0$ und $(k+2)(k+1)a_{k+2} = -2(k+1)a_k$.

$$a_{k+2} = -\frac{2}{k+2} a_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

$a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = -1,\ a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{1+3} a_1 = 0 \Rightarrow a_{2j+1} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$.

$a_2 = -1,\ a_{2j+2} = -\frac{2}{2j+2} a_{2j} = -\frac{1}{j+1} a_{2j} \Rightarrow a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{j!}$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = e^{-x^2}.$$

□

### 6.8.4 Berechnung von Grenzwerten

Ist $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ zu berechnen und haben $f$ und $g$ in $x_0$ jeweils eine Nullstelle hoher Ordnung, dann wird die Berechnung des Grenzwertes mit Hilfe der Regel von DE L'HOSPITAL zu aufwendig. Sind $f$ und $g$ bei $x_0$ in Potenzreihen entwickelbar, dann gilt

$$f(x)=\sum_{j=k_1}^{\infty}a_j(x-x_0)^j,\quad g(x)=\sum_{j=k_2}^{\infty}b_j(x-x_0)^j,$$

also ist

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{a_{k_1}(x-x_0)^{k_1}+a_{k_1+1}(x-x_0)^{k_1+1}+\ldots}{b_{k_2}(x-x_0)^{k_2}+b_{k_2+1}(x-x_0)^{k_2+1}+\ldots}\\&=(x-x_0)^{k_1-k_2}\frac{a_{k_1}+a_{k_1+1}(x-x_0)+\ldots}{b_{k_2}+b_{k_2+1}(x-x_0)+\ldots}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0, & \text{für } k_1>k_2\\ \frac{a_{k_1}}{b_{k_2}}, & \text{für } k_1=k_2\\ \pm\infty, & \text{für } k_1<k_2\end{cases}$$

**Beispiel 6.36**

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x^3}{\sinh^3 x\arctan x^2}$$

(Die Regel von DE L'HOSPITAL müßte 5-mal angewendet werden) $1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\ldots$, $\sin x^3=x^3-\frac{x^9}{3!}+\ldots$, $\sinh^3 x=x^3+\frac{x^4}{2}+\ldots$, $\arctan x^2=x^2-\frac{1}{2}x^4+\ldots$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(x^3-\frac{x^9}{6}+\ldots\right)}{\left(x^3+\frac{1}{2}x^4+\ldots\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x^4+\ldots\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{6}x^6+\ldots\right)}{\left(1+\frac{1}{2}x+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

## 6.9 Potenzreihen in $\mathbb{C}$

Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$ (also komplexe Zahlen) und $z = x+iy$ variabel, $z_0 = x_0+iy_0 \in \mathbb{C}$ fest, so kann man das Polynom

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$$

bilden.

Analog zur Definition einer Potenzreihe in $\mathbb{R}$ definiert man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ heißt *absolut konvergent* für $|z-z_0| < R$, wenn die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k$ für $|z-z_0| < R$ konvergiert. Dann wird jedem $z$ mit $|z-z_0| < R$ ein $P(z) \in \mathbb{C}$ durch $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ zugeordnet, also eine Funktion definiert.

*Konvergenzradius:*

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

So ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und mit $z = x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, daher definieren wir

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt nun $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ und

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i)^k y^k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!}(i)^{2j} y^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(i)^{2j+1} y^{2j+1}.$$

Wegen $(i)^{2j} = (-1)^j$ folgt

$$e^{iy} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} y^{2j} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2k+1)!} y^{2j+1} = \cos y + i \sin y.$$

Damit ist

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1,$$

$$|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Weiter gilt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz},\ n \in \mathbb{N}.$$

# Kapitel 7

# Komplexe Zahlen (Teil II)

## 7.1 Eulersche Darstellung komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ ist eindeutig durch ihren Betrag und den Winkel $\varphi$ bestimmt, der durch die positive $x$-Achse und den Strahl von 0 durch $z$ definiert wird: (vgl. Abb. 7.1)

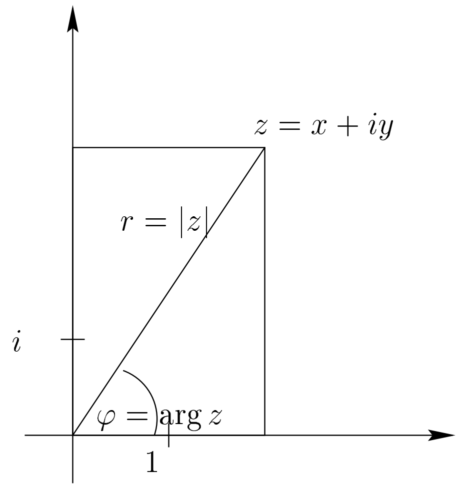


Abbildung 7.1: Komplexe Zahl

$$x = |z|\cos\varphi, \quad y = |z|\sin\varphi, \quad \text{also} \quad z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

**Definition 7.1** *Den Winkel $\varphi$ nennt man das* Argument *von $z$: $\varphi = \arg z$. Die Darstellung $z = |z|e^{i\varphi}$ nennt man die* Eulersche Darstellung *von $z$.*

Allerdings ist $\varphi$ hier nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$, also ist

$$z = |z|e^{i(\varphi+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Satz 7.2**

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} = z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2} \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Satz 7.3 (Multiplikation)** $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

**Satz 7.4 (Ganzzahlige Potenzen)** $m \in \mathbb{N},\ z = |z|e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow z^m = |z|^m e^{im\varphi} = |z|^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi).$$

**Definition 7.5 (Wurzel in $\mathbb{C}$)** $\alpha = |\alpha|e^{i\phi+2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$. *Gesucht* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $z^n = \alpha,\ n \in \mathbb{N}$. *Jede Lösung* $z$ *dieser Gleichung nennt man* $n$-te Wurzel aus $\alpha$. *Bezeichnung:* $z = \sqrt[n]{\alpha}$.

**Satz 7.6** *Aus* $z = |z|e^{i\varphi},\ \alpha = |\alpha|e^{i(\phi+2k\pi)}$ *und* $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |\alpha|e^{i(\phi+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z|^n = |\alpha| \\ n\varphi = \phi + 2k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}\, e^{i\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)},\ k \in \mathbb{Z}.$$

*Da* $k : n$ *genau die verschiedenen Reste* $0, 1, \ldots, n-1$ *besitzt, gilt*

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}\, e^{i\frac{1}{n}(\phi+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

*Die* $n$*-te Wurzel in* $\mathbb{C}$ *besitzt genau* $n$ *verschiedene Werte.*

Möchte man die $n$-te Wurzel in *kartesischer Darstellung* haben, so benutzt man $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, also

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}\, \left[\cos \frac{1}{n}(\phi + 2k\pi) + i \sin \frac{1}{n}(\phi + 2k\pi)\right],\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Bisher wurde $\varphi = \arg z$ nur geometrisch eingeführt. Ist nun $z = x + iy$ gegeben, so ist

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = |z| \cdot \cos\varphi,\ y = |z| \cdot \sin\varphi,$$

also $(x \neq 0)$ folgt $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ bzw. $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$. Damit gilt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

**Beispiel 7.7** $\sqrt[3]{-2+2i}$, $\quad |-2+2i| = \sqrt{8}$, $\phi = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi = \pi - \arctan 1 = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow$ Eulersche Darstellung: $-2+2i = \sqrt{8}\, e^{i(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\, e^{i(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Man erhält die Lösungen

$$\begin{aligned} k = 0 : z_0 &= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i. \\ k = 1 : z_1 &= \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} = z_0 e^{i\frac{2}{3}\pi} = z_0 \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) i, \\ k = 2 : z_2 &= z_0 e^{i\left(\frac{4}{3}\pi\right)} = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) i. \end{aligned}$$

□

**Satz 7.8 (Moivresche Formel)**

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

*Wegen* $\left\{ \begin{array}{l} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{array} \right\}$ *folgt*

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

*Außerdem gilt:*

$$\begin{aligned}\cos i\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i^2\varphi}+e^{-i^2\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\varphi}+e^{\varphi}\right)=\cosh\varphi,\\ -i\sin i\varphi &= -\frac{1}{2}\left(e^{i^2\varphi}-e^{-i^2\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right)=\sinh\varphi.\end{aligned}$$

**Definition 7.9 (Natürlicher Logarithmus in $\mathbb{C}$)** *Ist $z=|z|e^{i\arg z}\neq 0$, so definiert man*

$$\ln z := \ln|z| + i\arg z.$$

*Dabei ist $\ln|z|$ der reelle natürliche Logarithmus.*

*Es gilt dann:*

$$e^{\ln z}=e^{\ln|z|+i\arg z}=e^{\ln|z|}\cdot e^{i\arg z}=|z|e^{i\arg z}=z,$$

*also ist $\ln z$ auch in $\mathbb{C}$ die Umkehrung von $e^z$.*

*$\ln z$ ist nicht eindeutig, da $\arg z$ nicht eindeutig ist. Schränkt man $\arg z$ z. B. durch $-\frac{\pi}{2}<\arg z\leq\frac{3}{2}\pi$ ein, so erhält man den Hauptzweig des $\ln$:*

$$\ln z=\ln|z|+i\varphi,\quad \varphi=\arg z,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi\leq\frac{3}{2}\pi.$$

**Definition 7.10 (Allgemeine Potenz in $\mathbb{C}$)** *Analog wie in $\mathbb{R}$ kann man nun in $\mathbb{C}$ die allgemeine Potenz definieren.*

*Ist $\alpha\in\mathbb{C},\ \alpha\neq 0$, so ist*

$$\alpha^z := e^{z\ln\alpha}.$$

*Da $\ln\alpha$ $\infty$-vieldeutig ist, gilt dies auch für $\alpha^z$. Verwendet man nur den Hauptzweig des $\ln\alpha$ so erhält man den Hauptzweig (Hauptwert) von $\alpha^z$.*

**Beispiel 7.11** 1. $i^{1+i}=e^{(1+i)\ln i}=e^{(1+i)i[\frac{\pi}{2}+2k\pi]}=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}e^{i[\frac{\pi}{2}+2k\pi]},\ k\in\mathbb{Z}.$

Hauptwert: $e^{(1+i)i\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}=ie^{-\frac{\pi}{2}}.$

2. $(-1+i)^{2i}=e^{2i\ln(-1+i)}=e^{2i[\frac{1}{2}\ln 2+i(\frac{3}{4}+2k)\pi]}=e^{-(\frac{3}{2}+4k)\pi}e^{i\ln 2}.$

□

# Kapitel 8

# Lineare Algebra

## 8.1 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus

**Definition 8.1** *Sind $m$ Gleichungen der $n$ unbekannten Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$, in denen diese nur linear auftreteten, gegeben, so nennt man dies ein* lineares Gleichungssystem *(LGS)*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_{jk} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, m, \\ \qquad\qquad k = 1, \ldots, n \\ b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \end{array}$$

*Ist $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, so nennt man das LGS* homogen*, sonst* inhomogen.

*$(x_1, \ldots, x_n)$ wird eine* Lösung des LGS *genannt, wenn die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ alle $m$ Gleichungen erfüllen.*

*Die $j$-te Gleichung*

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$$

*wird* $j$-te Zeile des LGS *genannt. Entsprechend heißt*

$$\begin{array}{l} a_{1k}x_k \\ a_{2k}x_k \\ \vdots \\ a_{mk}x_k \end{array}$$

$k$-te Spalte.

Um zu einem Lösungsverfahren für ein LGS zu gelangen, machen wir zunächst folgende Betrachtungen:

**Definition 8.2** *Man nennt eine Umformung des LGS eine* Äquivalenzumformung, *wenn sie logisch einwandfrei ist und wenn das umgeformte System durch eine weitere Umformung wieder in den ursprünglichen Zustand gebracht werden kann.*

**Satz 8.3** *Folgende Umformungen sind offensichtlich Äquivalenzumformungen:*

1. *Vertauschung der Zeilen,*
2. *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$,*
3. *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.*

Mit Hilfe dieser elementaren Umformungen gelangt man zu einem Lösungsverfahren für lineare GLs, dem **Gaußschen Algorithmus**.

Zunächst kann man $a_{11} \neq 0$ voraussetzen (denn ist etwa $a_{11} = 0$, so muß mindestens ein $a_{j1}$ in der ersten Spalte $\neq 0$ sein, und man vertauscht dann die erste mit der $j$-ten Zeile).

Man multipliziert nun nacheinander die 1. Zeile mit $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ $(j = 2, 3, \ldots m)$ und addiert diese jeweils zur $j$-ten Zeile und erhält damit das LGS

$$\begin{array}{cl}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \left( \begin{array}{ccccc} c_{22}x_2 & + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\ c_{32}x_2 & + c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n & = & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{m2}x_2 & + c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n & = & \tilde{b}_m \end{array} \right)
\end{array}$$

Hier tritt nun unterhalb der 1. Zeile die Variable $x_1$ nicht mehr auf.

Dieses Verfahren wiederholt man nun mit dem (in Klammern stehenden) LGS

$$\begin{array}{ccccccc}
c_{22}x_2 & + c_{23}x_3 & + \ldots & + c_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\
c_{32}x_2 & + c_{33}x_3 & + \ldots & + c_{3n}x_n & = & \tilde{b}_3 \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots \\
c_{m2}x_2 & + c_{m3}x_3 & + \ldots & + c_{mn}x_n & = & \tilde{b}_m,
\end{array}$$

wenn mindestens ein $c_{j2} \neq 0$ ist. Es wird dann wieder diese Zeile mit der Zeile $c_{22}x_2 + \ldots$ vertauscht, so daß man $c_{22} \neq 0$ annehmen kann, und man erhält das LGS

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 & \\
 & + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 & \\
 & 0 \quad \left(\begin{array}{ccc} d_{33}x_3 + \ldots + d_{3n}x_n & = & \tilde{\tilde{b}}_3 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ d_{m3}x_3 + \ldots + d_{mn}x_n & = & \tilde{\tilde{b}}_m \end{array}\right) & & & \\
 & \vdots & & & \\
 & 0 & & &
\end{array}$$

Sind allerdings alle $c_{j2} = 0$ $(j \geq 2)$, dann vertauscht man die 2. Spalte mit der $k$-ten Spalte $(k > 2)$, in der mindestens ein $c_{kj} \neq 0$ ist und verfährt wie oben. (Die Variable $x_2$ wäre dann mit der Variablen $x_k$ vertauscht.)

(Aus schreibtechnischen Gründen wollen wir annehmen, daß ein Tausch der Spalten nicht nötig ist.)

Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man schließlich zu einem LGS

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{a_{11}x_1} + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \ldots & & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
0 & \boldsymbol{c_{22}x_2} + & c_{23}x_3 + & \ldots & & + & c_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots \\
0 + \ldots + & 0 & + & \boldsymbol{\tilde{d}_{kk}x_k} & + \ldots + & & \tilde{d}_{kn}x_n & = & b_k^* \\
0 + \ldots & & + & 0 & + \ldots + & & 0 & = & b_{k+1}^* \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
0 + \ldots & & + & 0 & + \ldots + & & 0 & = & b_m^*,
\end{array}$$

wobei $a_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0, \ldots, \tilde{d}_{kk} \neq 0$, d. h. alle Koeffizienten $\tilde{d}_{jj} \neq 0$ $(j = 3, \ldots, k)$ sind.

Daraus ergeben sich folgende Fälle:

1. Ist $k < m \wedge k \leq n$, so gilt:

   (a) Ist mindestens ein $b_j^* \neq 0$ für $k + 1 \leq j \leq m$, so besitzt das LGS keine Lösung.

   (b) Sind alle $b_j^* = 0$ für $k + 1 \leq j \leq m$ und

i. $k < n$, so kann man $x_{k+1} = t_1$, $x_{k+2} = t_2, \ldots, x_n = t_{n-k-1}$, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k-1} \in \mathbb{R}$ setzen und erhält $x_k$ in Abhängigkeit von $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k-1}$ aus der Gleichung

$$\tilde{d}_{kk} x_k + \ldots + d_{kn} x_n = b_k^*.$$

Mit diesen Werten für $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ geht man in die darüber liegende Zeile und löst diese nach $x_{k-1}$ auf usw., bis man in die 1. Zeile gelangt und nach $x_1$ auflöst. Die Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist dann von den Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k-1}$ abhängig.

ii. $k = n$, so steht in der $k$-ten Zeile (= $n$-ten Zeile): $\tilde{d}_{nn} x_n = b_n^*$, und $x_n = \frac{b_n^*}{\tilde{d}_{nn}}$ ist eindeutig bestimmt. Damit sind auch $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ eindeutig bestimmt, und das LGS besitzt dann genau diese Lösung, ist also eindeutig lösbar.

2. Ist $k = m$, so ist das LGS lösbar, und zwar

   (a) eindeutig, wenn $m = n$,

   (b) besitzt es unendlich viele (parameterabhängige) Lösungen, wenn $m < n$ gilt.

Da im Gauß-Verfahren nur die Koeffizienten $a_{jk}$ und $b_j$ umgeformt werden, führt man dieses Verfahren durch, indem man die Koeffizienten an ihren Plätzen läßt und die Variablen $x_k$ fortläßt. So gewinnt man mehr Übersicht und vermeidet unnötige Schreibarbeit.

$$\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \\
\hline
0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \tilde{b}_2 \\
0 & c_{32} & \ldots & c_{3n} & \tilde{b}_3 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \tilde{b}_m
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & & \ldots & & & a_{1n} & b_1 \\
0 & c_{22} & & \ldots & & & c_{2n} & \tilde{b}_2 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & c_{kk} & & \ldots & c_{kn} & \tilde{b}_k \\
0 & \ldots & & 0 & & \ldots & 0 & \tilde{b}_{k+1} \\
\vdots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & & 0 & & \ldots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}$$

usw.

**Beispiel 8.4** 1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

1. Schema:

$$\begin{array}{rrrr|rr} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{(1)} \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 & (2) \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & (3) \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 & (4) \\ \hline 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & (5) \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & (6) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{(7)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{-6} & \mathbf{(8)} \\ 0 & 0 & 0 & +6 & +6 & (9) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (10) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (8) & \Longrightarrow -6x_4 = -6 \Rightarrow x_4 = 1 \\ (7) & \Longrightarrow x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ & \Longrightarrow x_2 = 3 - 3x_4 + x_3 = x_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ \text{also } x_2 = t \\ (1) & \Longrightarrow x_1 = 1 + x_2 - x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = 1 + t - t + 1 = 2 \\ & \text{Lösung: } (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, t, t, 1),\ t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | −1 | 1 | (1) |
| 2 | 1 | −1 | 1 | 5 | (2) |
| −1 | −1 | 1 | 1 | −1 | (3) |
| 2 | −1 | 1 | 1 | 0 | (4) |
| 0 | 3 | −3 | 3 | 3 | (5) |
| 0 | −2 | 2 | 0 | 0 | (6) |
| 0 | 1 | −1 | 3 | −2 | (7) |
| 0 | 0 | 0 | −6 | 9 | (8) |
| 0 | 0 | 0 | 6 | −4 | (9) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | (10) |

Die letzte Zeile ergibt:
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5$
und besitzt damit keine Lösung.
$\Rightarrow$ System besitzt keine Lösung

$\square$

In einem späteren Abschnitt werden wir nochmals auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme eingehen, dazu benötigen wir aber einige Begriffe, die in den folgenden Kapiteln bereitgestellt werden.

## 8.2 Der $n$-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

In der Vektorrechnung haben wir schon den 3-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ kennengelernt.
Wir definieren nun:

**Definition 8.5**

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

*wird* $n$-dimensionaler euklidischer Raum *genannt.*
*Man bezeichnet, analog zum* $\mathbb{R}^3$*,*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad bzw. \quad \vec{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*als* Vektoren.

**Definition 8.6 (Addition)** *Sind* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *gegeben, so sei*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

**Definition 8.7 (Multiplikation mit einem „Skalar“ $\alpha \in \mathbb{R}$)**

$$\alpha\vec{a} = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

**Satz 8.8** *Mit dieser Addition und Multiplikation mit einem Skalar erfüllt der* $\mathbb{R}^n$ *die sogenannten* Vektorraumgesetze*:*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. *Mit* $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ *gilt* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. *Es existiert zu* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ein Vektor* $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ *mit* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$,
5. *Es ist* $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,
6. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
7. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
8. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

**Definition 8.9 (Skalarprodukt)** *Ist* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *so wird*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

*das* Skalarprodukt zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *genannt.*

Ebenso wie im $\mathbb{R}^3$ gilt auch hier

**Satz 8.10**

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}),\ \alpha \in \mathbb{R}$,

*3.* $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$

**Definition 8.11**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

*wird* Betrag von $\vec{a}$ *genannt.*

**Satz 8.12** *Es gilt:*

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

**Satz 8.13**

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

*bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, d. h. es gilt*

$$\vec{e}_j\vec{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

*und*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

**Definition 8.14** $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ *werden* linear unabhängig *genannt, wenn aus* $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_m\vec{a}_m = 0$ *folgt:* $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

## 8.3 Matrizen

**Definition 8.15** *Sind $a_{ik} \in \mathbb{R}$, so nennt man das rechteckige Zahlenschema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*eine* Matrix. *Kürzere Schreibweise:*

$$A = (a_{jk}), \quad j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n.$$

*genauer: $A$ ist eine $m,n$-*Matrix.

*$A$ besitzt $m$ Zeilen und $n$ Spalten. $a_{ik}$ werden die* Elemente der Matrix *$A$ genannt. $i$:* Zeilenindex, *$k$:* Spaltenindex.

*Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{jj}, \ldots,$ bilden die* Hauptdiagonale.

*Ist $B = (b_{ik}),\ i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n,$ so gilt*

$$B = A \iff b_{ik} = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n.$$

**Definition 8.16 (Spezielle Matrizen)** Nullmatrix*:*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad d.\ h. \quad a_{ik} = 0 \text{ für alle } i, k.$$

Diagonalmatrix*:*

$$D = (a_{jk}) \quad mit \quad a_{jk} = 0 \text{ für } j \neq k,$$

*d. h. in einer Diagonalmatrix sind alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null.*

*Eine Matrix $A$ heißt* Dreiecksmatrix*, wenn entweder alle Elemente unterhalb oder alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind:*

$$A = (a_{kj}) \quad mit \quad a_{jk} = 0 \text{ für } j > 0 \quad oder \quad a_{ik} = 0 \text{ für } k < j.$$

### 8.3.1 Rechenoperationen für Matrizen

**Definition 8.17 (Addition)** *Sind $A = (a_{jk}),\ B = (b_{jk})$ zwei $m,n$-Matrizen, so ist $A + B = (a_{jk} + b_{jk})$, d. h.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Definition 8.18 (Multiplikation mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$)**

$$\alpha A = \alpha(a_{ik}) = (\alpha a_{ik}).$$

**Definition 8.19 (Matrizenprodukt)** *Sei $A = (a_{jk})$ eine $m,n$-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $l,r$-Matrix.*

*Man nennt dann*

$$\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}), \quad j = 1, \ldots m$$

*den* $j$-ten Zeilenvektor von A,

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{lk} \end{pmatrix}$$

*den* $k$-ten Spaltenvektor von B.

*Ist nun $l = n$, so kann man das Skalarprodukt zwischen $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_k$ für $j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, r$ bilden. Man definiert dann das Produkt*

$$AB = (\vec{a}_j \vec{b}_k), \quad j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, r.$$

*$AB$ ist dann eine $m,r$-Matrix.*

*Ist $r = m$ und $\vec{c}_k = \begin{pmatrix} a_{ik} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ der $k$-te Spaltenvektor von $A$ und $\vec{d}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jr})$ der $j$-te Zeilenvektor von $B$, so ist*

$$B \cdot A = (\vec{d}_j \vec{c}_k)$$

*eine $l,n$-Matrix.*

*Man kann also $AB$ genau dann bilden, wenn die Zeilenlänge von $A$ gleich der Spaltenlänge von $B$ ist.*

**Falksches Schema** *für $A \cdot B$:*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vec{a}_1:$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $\vec{a}_1\vec{b}_1$ | $\cdots$ | $\vec{a}_1\vec{b}_k$ | $\cdots$ | $\vec{a}_1\vec{b}_r$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\vec{a}_j:$ | $a_{j1}$ | $a_{j2}$ | $\cdots$ | $a_{jn}$ | $\vec{a}_j\vec{b}_1$ | $\cdots$ | $\vec{a}_j\vec{b}_k$ | $\cdots$ | $\vec{a}_j\vec{b}_r$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\vec{a}_m:$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $\vec{a}_m\vec{b}_1$ | $\cdots$ | $\vec{a}_m\vec{b}_k$ | $\cdots$ | $\vec{a}_m\vec{b}_r$ |
| | | | | | $b_{11}$ | $\cdots$ | $b_{1k}$ | $\cdots$ | $b_{1r}$ |
| | | | | | $b_{21}$ | $\cdots$ | $b_{2k}$ | $\cdots$ | $b_{2r}$ |
| | | | | | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| | | | | | $b_{n1}$ | $\cdots$ | $b_{nk}$ | $\cdots$ | $b_{nr}$ |
| | | | | | $\vec{b}_1$ | | $\vec{b}_k$ | | $\vec{b}_r$ |

Es ist möglich, daß $AB$ zu bilden ist, aber nicht $BA$, und selbst wenn $AB$ und $BA$ existieren, können sie verschiedenes „Format" haben.

**Beispiel 8.20**

$$A = (1, 2, 3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$AB = (2), \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

also $AB$ ist eine $1,1$-Matrix, $BA$ ist eine $3,3$-Matrix. □

Doch auch wenn $AB$ und $BA$ gleiches „Format" haben, gilt i. a. nicht $AB = BA$.

**Beispiel 8.21**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Satz 8.22** *Es gilt aber (sofern die Produkte existieren):*

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB),\ \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $(A + B)C = AC + BC$.

**Definition 8.23** *Vertauscht man in der $m, n$-Matrix $A = (a_{jk})$ die Zeilen mit den Spalten, d. h. spiegelt man $A$ an der Hauptdiagonalen, so erhält man die* zu $A$ transponierte Matrix $A^\top$.

**Beispiel 8.24**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Definition 8.25** *Matrizen, deren Zeilenzahl gleich der Spaltenzahl ist, nennt man* quadratische Matrizen*:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{jk}), \quad j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots n.$$

Im folgenden sollen (sofern nichts anderes angemerkt wird) $A, B, C, \ldots$ steths quadratische Matrizen gleicher Dimension sein. ($A, B, C, \ldots$ $n, n$-Matrizen mit gleichem $n$.)

**Definition 8.26** *Eine besondere Rolle spielt nun die Matrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*deren Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich 1, sonst gleich Null sind.*

*Man nennt $E$ die* Einheitsmatrix.

**Satz 8.27** *Es gilt für jede $n, n$-Matrix $A$:*

$$AE = EA = A.$$

**Definition 8.28** *Existiert zur Matrix $A$ eine Matrix $B$ mit $A \cdot B = E$, so nennt man $B$ die zu $A$* inverse Matrix *und bezeichnet diese mit $A^{-1}$ $(B = A^{-1})$.*

**Beispiel 8.29** Nicht jede Matrix $A$ besitzt eine inverse Matrix, selbst wenn $A$ nicht die Nullmatrix ist. So ist z. B. mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}: \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

daher existiert $A^{-1}$ nicht, denn sonst wäre

$$0 = 0 \cdot A^{-1} = (BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = BE = B,$$

was offensichtlich falsch ist. □

Wir kommen wieder auf das Problem der inversen Matrix zurück, nachdem wir Determinanten eingeführt haben.

## 8.4 Determinanten

**Vorbemerkungen:** In der räumlichen Vektorrechnung (Kap. 2) haben wir das Vektorprodukt und das Spatprodukt kennengelernt. So sahen wir, daß das Vektorprodukt von $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

den (orientierten) Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms angibt.

Ebenso erhielten wir durch das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

das (orientierte) Volumen des durch $\vec{a}, vb, vc$ aufgespannten Spates.

Man definiert nun

**Definition 8.30 (zweireihige Determinante)** *Für* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *heißt*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$$

Determinante von $A$.

Diese Determinante kann man geometrisch als (orientierten) Flächeninhalt des von den Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) der Matrix $A$ aufgespannten Parallelogramms deuten.

**Definition 8.31 (dreireihige Determinante)** *Ist* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, *so nennt man*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ -\ a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ +\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{array}$$

*die* Determinante von $A$.

**Satz 8.32** *Eine dreireihige Determinante kann man auch mit Hilfe der* **Sarrus'schen Regel** *berechnen:*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & & \\
 & & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & & & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & & \\
 & & \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & & & \\
 - & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & & + \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 -a_{13}a_{22}a_{31} & & -a_{11}a_{23}a_{32} & & -a_{12}a_{21}a_{33} & & +a_{11}a_{22}a_{33} & & +a_{12}a_{23}a_{31} & & +a_{13}a_{21}a_{32} &
\end{array}$$

Geometrisch kann man die dreireihige Determinante als das (orientierte) Volumen des von den Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) aufgespannten Spates deuten.

Nun ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

d. h. man kann die dreireihige Determinante durch zweireihige *„Unterdeterminanten"* berechnen.

Wir definieren nun die Determinante einer $n, n$-Matrix $A$ induktiv: $n = 4, 5, \ldots$:

Wir nehmen an, die $(n-1)$-reihige Determinante sei schon definiert, und die $n, n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Entfernt man aus der Matrix $A$ die $j$-te Zeile und die $k$-te Spalte, so erhält man eine $n-1, n-1$-Matrix $\tilde{A}_{jk}$. Man kann dann die Determinante $|\tilde{A}_{jk}|$ bilden, setzt

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} |\tilde{A}_{jk}|, \quad j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, n,$$

(man nennt $A_{ik}$ die *Adjunkten* von $A$) und definiert

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.$$

Man sagt dann: „$A$ wird nach der 1. Zeile entwickelt."

Es gilt nun:

**Satz 8.33**

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \quad \textit{für alle } j = 1, 2, \ldots, n,$$

*d. h. man kann $A$ nach einer beliebigen Zeile entwickeln,*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \quad \textit{für alle } k = 1, 2, \ldots, n,$$

*d. h. man kann $A$ nach einer beliebigen Spalte entwickeln.*

**Beispiel 8.34**

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &\overset{1.Zeile}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Entwicklung nach 3. Spalte} \\
&\quad - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Entwicklung nach 1. Zeile} \\
&\quad + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Entwicklung nach 1. Zeile} \\
&\quad - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \left(1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&\quad + \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&\quad + \left(-1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

□

**Satz 8.35 (Determinantenregeln)** *1. Es ist* $|A^\top| = |A|$.

2. *Vertauscht man in der Determinante zwei Zeilen (bzw. zwei Spalten), so ändert sich nur ihr Vorzeichen.*

3. *Multipliziert man eine Zeile (Spalte) der Determinante* $|A|$ *mit einer Zahl* $\alpha$, *so ist der Wert der so gebildeten Determinante* $\alpha|A|$.

4. *Besteht eine Zeile (Spalte) nur aus Nullen, so ist* $|A| = 0$.

5. *Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich der Wert der Determinante nicht.*

6. *Es ist* $|A| \neq 0 \iff$ *Die Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) von* $A$ *sind linear unabhängig.*

7. *Ist $A$ eine Dreiecksmatrix (oder sogar eine Diagonalmatrix), so ist $|A|$ gleich dem Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen.*

8. *Es gilt:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}+b_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}+b_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

9. *Es ist $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

**Bemerkung:** *Die Determinante $|A|$ ordnet der Matrix $A$ eine reelle Zahl zu.*
*Man kann die Determinante auch als eine Funktion der Zeilenvektoren von $A$: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ auffassen:*

$$|A| = D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

*Dann erhält man aus den Determinantenregeln:*

1. $$\begin{aligned} &D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{a}_k + \beta\vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &\quad = \alpha D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &\qquad + \beta D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \quad k = 1, 2, \dots n, \end{aligned}$$
   *(folgt aus 1, 3, 8)*

2. $D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+2}, \dots, \vec{a}_n) = -D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ *(folgt aus 2),*

3. $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$ *(folgt aus 7),*

*und die Determinante ist durch 1, 2, 3 eindeutig bestimmt.*

Mit Hilfe der Regeln 3, 5 und 7 lassen sich häufig Determinanten weniger aufwendig berechnen als durch wiederholte Entwicklung nach Zeilen oder Spalten:

**Beispiel 8.36**

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}
&= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72.
\end{aligned}
$$

□

## 8.5 Inverse Matrix

Mit Hilfe der Determinante kann man nun bestimmen, wann eine quadratische Matrix $A$ eine inverse Matrix $A^{-1}$ besitzt

Sei nun $A = (a_{jk}),\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n$ gegeben. Existiert zu $A$ die Inverse $A^{-1}$, dann gilt $A \cdot A^{-1} = E$ ($E$: Einheitsmatrix). Damit folgt

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1,$$

also muß $|A| \neq 0$ sein, und damit ist

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Ist andererseits $A$ eine Matrix mit $|A| \neq 0$,

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dann seien $A_{jk}$ die Adjunkten zu $A$ und $B = (A_{jk})$, dann ist $B^\top = (A_{kj})$ und

$$A \cdot B^\top = \left( \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{lk} \right).$$

Nun gilt aber für $j = l$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = |A|,$$

und für $l \neq j$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{lk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

da die $j$-te und $l$-te Zeile übereinstimmen.

Also erhält man:

$$A \cdot B^\top = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix},$$

und somit

$$A \cdot \left( \frac{1}{|A|} B^\top \right) = E,$$

woraus

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^\top = \frac{1}{|A|} (A_{jk})^\top$$

folgt.

Zusammenfassend erhalten wir

**Satz 8.37** *Die quadratische Matrix $A = (a_{jk}),\ j,k = 1,\ldots,n$ besitzt genau dann eine inverse Matrix $A^{-1}$, wenn $|A| \neq 0$ ist, und $A^{-1}$ ist dann durch*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{jk})^\top$$

*gegeben, wobei $A_{jk}$ die Adjunkten zu $A$ sind.*

**Bemerkung:** *Die Adjunkten $A_{jk}$ nennt man auch die algebraischen Komplemente $A_{jk}$ zu $a_{jk}$.*

**Beispiel 8.38**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Wir wollen noch eine weitere Methode zur Berechnung einer Inversen kennenlernen. Es sei $|A| \neq 0,\ A = (a_{jk})$ und $A^{-1} = (x_{jk})$ zu bestimmen. Wegen $A \cdot A^{-1} = E$ folgt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{kn} \\ \vdots & \sum_{k=1}^n a_{jl}x_{lk} & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}x_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_{11}+\ldots+a_{1n}x_{n1} &=& 1, \\ a_{21}x_{11}+\ldots+a_{2n}x_{n1} &=& 0, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_{11}+\ldots+a_{nn}x_{n1} &=& 0, \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_{1n}+\ldots+a_{1n}x_{nn} &=& 0, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_{1n}+\ldots+a_{n-1,n}x_{nn} &=& 0, \\ a_{n1}x_{1n}+\ldots+a_{nn}x_{nn} &=& 1, \end{array}$$

Diese löst man mit Hilfe des *Gauß-Seidel-Verfahrens*: Da die Koeffizientenmatrix der $n$ LGs stets $A$ ist, wendet man den Gaußalgorithmus mit den $n$ rechten Seiten

$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

an:

$$\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

Allerdings beendet man nun nicht die Zeilenumformungen, wenn Dreiecksgestalt erreicht ist, sondern setzt das Verfahren so lange fort, bis auf der linken Seite aus $A$ die Einheitsmatrix entstanden ist. Dann erscheint rechts die inverse Matrix.

**Beispiel 8.39**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 9 \neq 0.$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

## 8.6 Lineare Gleichungssysteme, Cramersche Regel

Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

läßt sich das LGS

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

kürzer angeben durch

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

**Definition 8.40** *Man nennt dann das Gleichungssystem* $A\vec{x} = \vec{b}$ inhomogen, *wenn* $\vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ *ist.* $A\vec{x} = \vec{0}$ *wird* homogenes lineares Gleichungssystem *genannt.*

*A nennt man die* Koeffizientenmatrix *des LGS.*

**Satz 8.41** *Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ ein inhomogenes LGS und $A\vec{x} = \vec{0}$ das dazu gehörende homogene LGS, dann erhält man:*

*Sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ Lösungen des inhomogenen LGS und ist $\vec{x}_h$ eine Lösung des homogenen LGS, so folgt:*

1. $A\vec{x}_1 = \vec{b},\ A\vec{x}_2 = \vec{b} \Longrightarrow A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ *Lösung des homogenen LGS.*

2. $A\vec{x}_1 = \vec{b},\ A\vec{x}_h = \vec{0} \Longrightarrow A(\vec{x}_1 + \vec{x}_h) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} \Longrightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_h$ *Lösung des inhomogenen LGS.*

*Daraus erhält man:*

*Ist $\vec{x}_A$ die allgemeine Lösung, $\vec{x}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS und $\vec{x}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen LGS, dann gilt:*

$$\vec{x}_A = \vec{x}_h + \vec{x}_p.$$

*Sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l$ Lösungen des homogenen LGS, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$*

$$\Rightarrow A(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 + \ldots + \alpha_l\vec{y}_l) = \alpha_1 A\vec{y}_1 + \ldots + \alpha_l A\vec{y}_l = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 + \ldots + \alpha_l\vec{y}_l$ *Lösung des homogenen LGS.*

*Die Lösungen des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ bilden damit einen Vektorraum.*

**Definition 8.42** *Ist $A$ eine $m, n$-Matrix, so nennt man die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) den* Rang der Matrix*: $\operatorname{Rang} A$.*

*Natürlich ist* $\operatorname{Rang} A \leq \min(m, n)$.

Stellt man $A$ durch die Spaltenvektoren $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ dar, $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m)$, so schreibt sich das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ als

$$\vec{a}_1 x_1 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b},$$

und es ist daher genau dann lösbar, wenn $\vec{b}$ eine Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ist. Daher gilt

**Satz 8.43** *$A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} =: (A, \vec{b})$$

*gleich dem Rang von $A$ ist.*

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß das LGS durch $n$ Gleichungen der $n$ unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ gegeben ist. Dann ist die Koeffizientenmatrix $A$ eine quadratische Matrix.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{b}.$$

Ist $\operatorname{Rang} A = r$, so ist $r \leq n$, und stellt man $A$ wieder durch Spaltenvektoren dar, $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, so gilt für das homogene LGS:

$$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Ist nun $r = n$, dann sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig und damit $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ einzige Lösung (*triviale Lösung*).

Wenn $r < n$ ist, so existieren Lösungen $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Diese nennt man *nichttriviale Lösungen des homogenen LGS*, sie hängen dann von $n - r$ Parametern ab. $(0, \ldots, 0)$ nennt man die *triviale Lösung*.

Da die Determinante $|A| \neq 0 \iff \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, erhält man:

**Satz 8.44** *Das homogene LGS besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $|A| = 0$ ist.*

Ist $\operatorname{Rang} A = n$, so sind die Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, und jeder Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ läßt sich durch

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$$

mit eindeutig bestimmten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ darstellen. Daher erhält man:

**Satz 8.45** *Das inhomogene LGS* $A\vec{x} = \vec{b}$

1. *ist eindeutig lösbar* $\iff \operatorname{Rang} A = n \iff |A| \neq 0$.
2. *besitzt parameterabhängige Lösungen* $\iff \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A, \vec{b}) < n$.
3. *besitzt keine Lösungen* $\iff \operatorname{Rang} A < \operatorname{Rang}(A, \vec{b})$.

Ist nun $|A| \neq 0$, so existiert $A^{-1}$, und damit erhält man: Aus $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, also

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Wegen

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n A_{l1}b_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n A_{lk}b_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n A_{ln}b_l \end{pmatrix}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{l=1}^n b_l A_{lk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_k,$$

d. h. die Determinante $D_k$ entsteht, indem man in der Determinante von $A$ die $k$-te Spalte durch $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ersetzt. Somit erhält man die

**Satz 8.46 (Cramersche Regel)** *Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, und ist $|A| \neq 0$, so erhält man die (eindeutige) Lösung*

$$x_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*wobei $D_k$ aus $|A|$ entsteht, indem man die $k$-te Spalte in $|A|$ durch $\vec{b}$ ersetzt.*

**Beispiel 8.47**
$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 &=& 1 . \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &=& 2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{|A|} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|} = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{3}{4}.$$

□

## 8.7 Eigenwertprobleme

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_{jk})$ eine $n, n$-Matrix, so ist

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k a_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

wieder ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$.

Für die Anwendung (z. B. Bestimmung der Hauptträgheitsachen, Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen etc.) ist die Lösung des folgenden Problems von Interesse:

**Definition 8.48 (Eigenwertproblem)** *Zur gegebenen Matrix* $A = (a_{jk}),\ j,k = 1,2,\ldots,n$ *bestimme man alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}.$$

*Lösen* $\lambda_0$ *und* $\vec{a}_0 \neq \vec{0}$ *diese Gleichung, so nennt man* $\lambda_0$ *einen* Eigenwert von $A$, $\vec{a}_0$ *einen* Eigenvektor von $A$.

Ist $E$ die Einheitsmatrix, so gilt $E\vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, daher kann man das Eigenwertproblem auch schreiben als

$$A\vec{a} = \lambda E\vec{a} \iff (A - \lambda E)\vec{a} = \vec{0}.$$

Diese Gleichung stellt aber ein homogenes LGS mit dem unbekannten Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und der Koeffizientenmatrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

dar.

Nun existiert aber genau dann eine nichttriviale Lösung $\vec{a} \neq \vec{0}$, wenn die Koeffizientendeterminante $|A - \lambda E| = 0$ ist. Es ist nun

$$P(\lambda) = |A - \lambda E|$$

ein Polynom $n$-ten Grades in $\lambda$.

Man geht daher zur Lösung des Eigenwertproblems folgendermaßen vor:

1. Man bestimmt die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des Polynoms $P(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$,

2. Man berechnet zu jedem $\lambda_k$ durch Lösen des LGS $(A - \lambda_k E)\vec{a} = \vec{0}$ den (bzw. die) Eigenvektor(en) zu $\lambda_k$.

Dies geht (ohne Probleme), wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reell und paarweise verschieden sind. Man erhält dann zu jedem $\lambda_k$ genau einen Eigenvektor $\vec{a}_k$ mit $|a_k| = 1$ (da mit $\vec{a}$ auch $t\vec{a}$ Lösung des LGS ist, kann man $|\vec{a}_k| = 1$ wählen), und diese sind dann linear unabhängig. Denn wären $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig, so könnte man z. B. $\vec{a}_n$ durch die anderen $\vec{a}_k$ darstellen, etwa $\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{a}_l$, wobei man annehmen könnte, daß $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_l$ linear unabhängig sind.

Wegen $A\vec{a}_n = \lambda_n\vec{a}_n \Rightarrow A(\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{a}_l) = \alpha_1\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_l\lambda_l\vec{a}_l = \lambda_n\vec{a}_n \Rightarrow$ (wegen $\lambda_n\vec{a}_n = \lambda_n(\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{a}_l)$) $\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_l(\lambda_n - \lambda_l)\vec{a}_l = \vec{0}$, im Widerspruch zu $\lambda_n \neq \lambda_k$ $(k \neq n)$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_l$ linear unabhängig.

Ist $U = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ die Matrix, deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren sind, so ist $|U| \neq 0$, also existiert $U^{-1}$. Außerdem ist dann

$$AU = (\lambda_1\vec{a}_1, \ldots, \lambda_n\vec{a}_n) = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

also erhält man

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

d. h. man kann dann die Matrix $A$ in eine Diagonalmatrix transformieren.

Im allgemeinen sind allerdings die Eigenwerte einer Matrix $A$ nicht reell und paarweise verschieden und eine Transformation in Diagonalform ist nicht für alle Matrizen möglich. Jedoch gibt es (für die Anwendung wichtige) spezielle Matrizen, für welche dies immer möglich ist, die *symmetrischen Matrizen*:

**Definition 8.49** *$A$ wird* symmetrisch *genannt, wenn $A^\top = A$ ist.*

Es gilt:

**Satz 8.50** *Die Eigenwerte $\lambda_a, \ldots, \lambda_n$ einer symmetrischen Matrix $A$ sind reell und $A$ besitzt $n$ Eigenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ mit $|\vec{a}_k| = 1$, $k = 1, \ldots, n$, und $\vec{a}_j\vec{a}_k = 0$ für $j \neq k$. Ist dann wieder $U = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, so gilt*

$$U^\top U = (\vec{a}_j\vec{a}_k) = E,$$

*d. h. es ist*

$$U^\top = U^{-1}.$$

*Eine solche Matrix $U$ nennt man* unitär, *wenn noch $|U| = 1$ ist.*

Man erhält dann (wenn z. B. die Eigenwerte ihrer Größe nach geordnet sind):

$$U^\top AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 8.51** Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnung der Eigenwerte $\lambda$:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 165\lambda + 242 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 11,\ \lambda_3 = 2.$$

2. Berechnung der Eigenvektoren: $\lambda_3 = 2$:

$$(A - 2E)\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ \hline 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_3 = t(1,1,1) \Rightarrow \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \text{ normierter Eigenvektor.}$$

$\lambda_2 = \lambda_1 = 11$:

$$(A - 11E)\vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}.$$

Mit $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Mit $x_3 = t$, $x_2 = s$: $\vec{a} = s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$. Man erhält hier als Eigenvektoren eine Linearkombination der Vektoren $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, die beide senkrecht zu $\vec{a}_3$ sind. Um nun $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ zu erhalten mit $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 1$ und $\vec{a}_1\vec{a}_2 = 0$, setzt man z. B.

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \quad \vec{\tilde{a}}_2 = s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_1\vec{\tilde{a}}_2 = 0 \iff s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff t = -2s.$$

$$\vec{\tilde{a}}_2 = s(1,1,-2) \Rightarrow \vec{a}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Wegen $|\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3| = 1$ ist $\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$ zu wählen. Mit

$$U = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$U^\top A U = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Geometrisch bedeutet die letzte Gleichung:

Durch die Matrix $U$ wird die Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in die Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ übergeführt und mit $\vec{y} = U^\top\vec{x}$, d. h. $\vec{x} = U\vec{y}$ wird $\vec{x}^\top A\vec{x}$ in $\vec{y}^\top D\vec{y} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k y_k^2$ überführt. $\square$

## 8.8 Koordinatentransformation

Im Raum $\mathbb{R}^n$ ist durch $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ eine ausgezeichnete rechtwinklige Basis gegeben, welche ein rechtwinkliges Koordinatensystem erzeugt,

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_m) = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n.$$

Sind nun $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$, so bilden auch $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, d. h. jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ sind dann die *Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.*

Wir wollen nun sehen, wie diese Koordinaten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ von $\vec{a}$ mit den Koordinaten $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ bezüglich $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ zusammenhängen.

Es ist nun

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

also

$$\vec{a}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_j,$$

daher ist

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk} \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\vec{e}_j$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk} = a_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ist nun $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ die aus den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ gebildete Matrix, so gilt also

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

und da $A^{-1}$ existiert:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

d. h. die Koordinaten werden durch $A$ bzw. $A^{-1}$ transformiert.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß auch $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ paarweise senkrecht zueinander sind und den Betrag 1 haben. Dann ist mit

$$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n): \quad AA^\top = (\vec{a}_j \vec{a}_k) = E,$$

also $A^{-1} = A^\top$. $A$ ist dann eine unitäre Matrix, wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ so angeordnet sind, daß $|A| = 1$ ist.

Umgekehrt bildet jede unitäre Matrix $U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ die Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ in die Basis $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ ab:

$$U\vec{e}_k = \vec{u}_k.$$

**Satz 8.52** *Bei der Abbildung durch unitäre Matrizen bleiben Längen und Volumina erhalten:*

$$|U\vec{a}| = |\vec{a}|, \quad |UA| = |A|$$

*für alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und alle $n,n$-Matrizen $A$.*

Geometrisch können wir nun das Eigenwert- und Eigenvektorproblem so deuten:

Gegeben ist die symmetrische Matrix $A$. Man bestimme eine unitäre Transformationsmatrix $U$ so, daß $A$ durch $U^\top AU$ in eine Diagonalmatrix übergeführt wird.

Ist dann $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_k = U^\top \vec{e}_k,\ k = 1, \ldots, n$ die neue rechtwinklige Basis, so besitzt $\vec{x}$ bezüglich der neuen Basis $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ die Koordinaten $(y_1, \ldots, y_n)$ mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = U^\top \vec{x}$, bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Es ist dann

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AU \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$$

und mit $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)U^\top$ folgt dann

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= (y_1, \ldots, y_n)U^\top AU \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2.
\end{aligned}$$

## 8.9 Ebene Koordinatentransformation

Ist $n = 2$, so ist durch $\mathbb{R}^2$ die $(x, y)$-Ebene gegeben mit der ausgezeichneten Basis $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

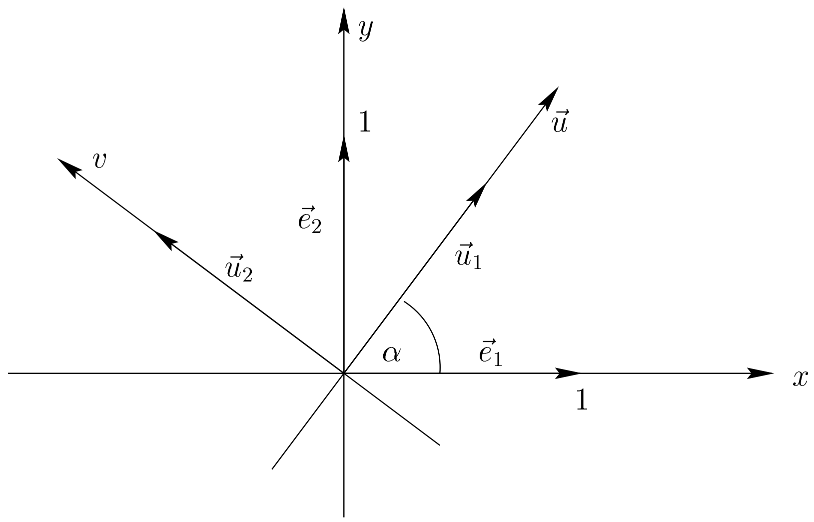


Abbildung 8.1: Koordinatentransformation

Ist nun $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$ eine weitere rechtwinklige Basis, so daß mit $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ $|U| = 1$ gilt und $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$, so kann man (wegen $u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1$)

$$u_{11} = \cos\alpha, \quad u_{21} = \sin\alpha$$

setzen. Wegen $|\vec{u}_2| = 1,\ \vec{u}_1\vec{u}_2 = 0$ und $|U| = 1$ folgt dann $u_{12} = -\sin\alpha,\ u_{22} = \cos\alpha$, also

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ist nun $\vec{x} = (x, y)$, so besitzt $\vec{x}$ im $(u, v)$-Koordinatensystem die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{u}_1 = U\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

bewirkt $U$ eine *Drehung* des Koordinatensystems um den Winkel $\alpha$.

Eine *Parallelverschiebung* des Koordinatensystems wird durch

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

gegeben.

## 8.10 Ebene Kegelschnitte

**Definition 8.53** *Durch*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y = a_0$$

*wird ein* ebener Kegelschnitt *definiert.*

### 8.10.1 Normalformen

1. $a_{12} = 0,\ a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_0 > 0,\ a_1 = a_2 = 0.$

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a = \sqrt{\frac{a_0}{a_{11}}},\ b = \sqrt{\frac{a_0}{a_{22}}}.$$

   *Ellipse* mit *Halbachsen* $a, b$ (s. Abb. 8.2).

   $$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad \text{(Parameterdarstellung)}$$

   Kreis um $(0, 0)$ mit Radius $a$, wenn $b = a$.

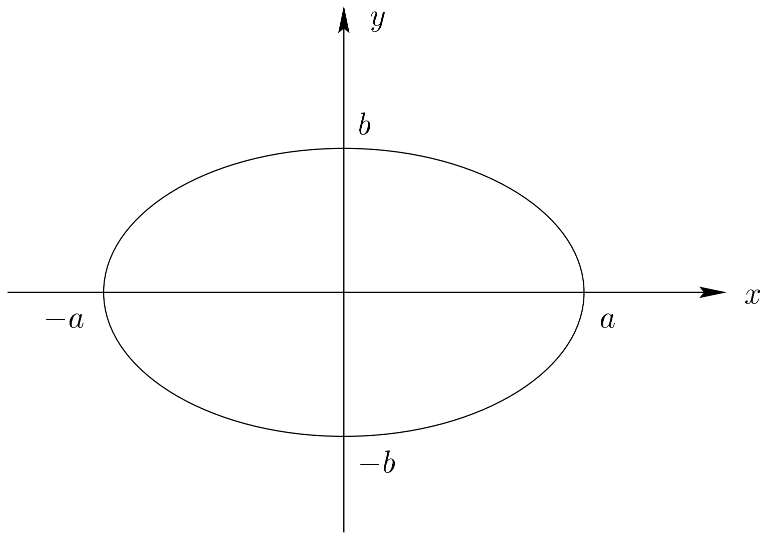


Abbildung 8.2: Ellipse

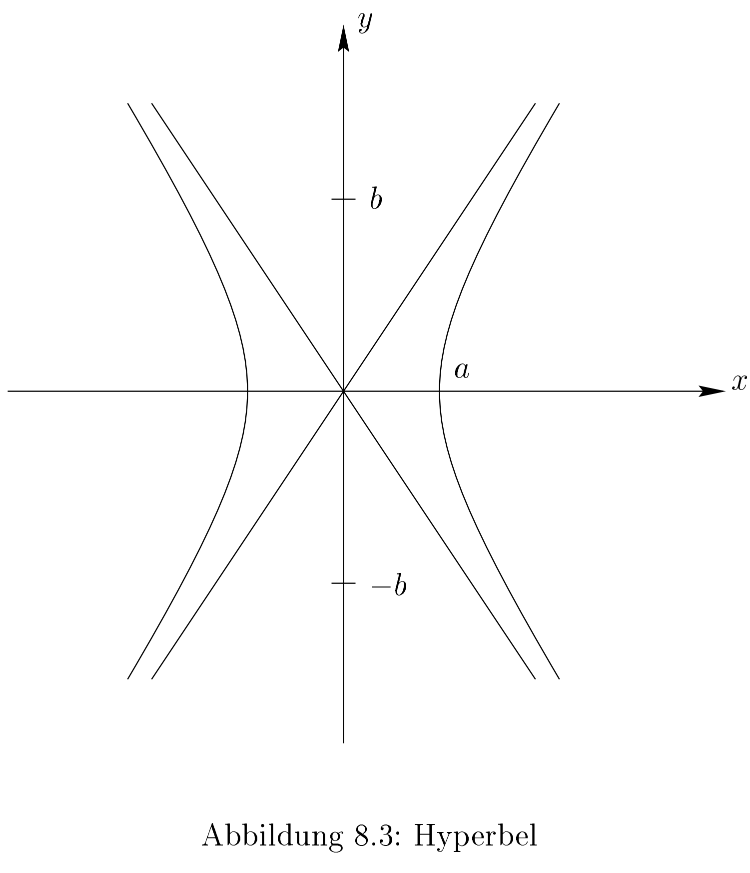


Abbildung 8.3: Hyperbel

2. $a_{12} = 0,\ a_0 > 0,\ a_{11} \cdot a_{22} < 0,\ a_1 = a_2 = 0.$ *Hyperbeln* (s. Abb. 8.3).

   (a) $a_{11} > 0 \Rightarrow a_{22} < 0,\ a_{11}x^2 - |a_{22}|y^2 = a$

   $$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a = \sqrt{\frac{a_0}{a_{11}}},\ b = \sqrt{\frac{a_0}{|a_{22}|}}.$$

   (b) $a_{11} < 0 \Rightarrow a_{22} > 0$

   $$\Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a = \sqrt{\frac{a_0}{|a_{11}|}},\ b = \sqrt{\frac{a_0}{a_{22}}}.$$

   (Schaubild aus obigem durch Vertauschen der Achsen und $a, b$.)

3. (a) $a_{11} \neq 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 \neq 0.$

   $a_{11}x^2 + a_2y = a$ *Parabel* (s. Abb. 8.4)

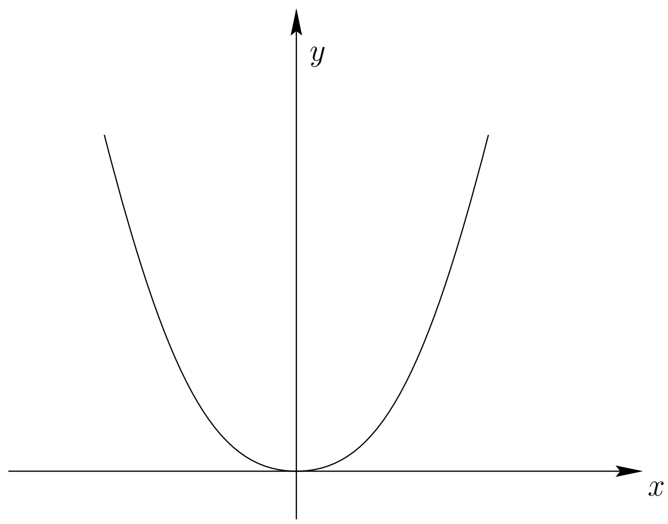


Abbildung 8.4: Parabel

   (b) $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_1 \neq 0,\ a_2 = 0.$

   $a_{22}y^2 + a_1x = a$ Parabel

   (Es können noch weitere, sogenannte ausgeartete, Fälle auftreten.)

4. (a) $a_{11} \cdot a_{22} < 0,\ b_1 = b_2 = a_0 = a_{12} = 0.$

   $$a_{22}\left(y^2 - \left|\frac{a_{11}}{a_{22}}\right| x^2\right) = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\left|\frac{a_{11}}{a_{22}}\right|}\, x$$

   *Geradenpaar.*

(b) $a_{11} \cdot a_{22} > 0,\ b_1 = b_2 = a_0 = a_{12} = 0$. Nur Nullpunkt.

(c) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Eine Gerade

Mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ und dem Vektor $\vec{b} = (b_1, b_2)$ schreibt sich die Kegelschnittgleichung

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_0.$$

Hat nun die Matrix $A$ Diagonalform, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, so erhält man

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_1 x + b_2 y = a_0,$$

und man kann dann, wenn nötig durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, die Normalform des Kegelschnitts leicht erhalten.

Ist die symmetrische Matrix $A$ keine Diagonalmatrix, so kann man sie mit Hilfe ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren in Diagonalform bringen.

Man bestimmt also die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ und die Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, setzt $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und erhält

$$(u, v)U^\top AU \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b}U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = a_0,$$

also

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + c_1 u + c_2 v = a_0, \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b_1, b_2)U.$$

**Beispiel 8.54** 1. $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x \cdot y = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (0, 0),\ a_0 = 1$.

Eigenwerte: $\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Eigenvektoren: $\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 = 1$, Hyperbel.

2. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y = 30.$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = -6(1,1).$$

Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 2.$

Eigenvektoren: $\left.\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \left.\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow 4u^2 + 2v^2 - 6\sqrt{2}\,u = 30 \Rightarrow 4(u - \frac{3}{4}\sqrt{2})^2 + 2v^2 = \frac{69}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\left(u - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2}{\frac{69}{8}} + \frac{v^2}{\frac{69}{4}} = 1 \quad \text{Ellipse.}$$

3. $9x^2 + 6xy + y^2 - \sqrt{10}\,x\sqrt{10}\,y = 10.$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 10, \ \lambda_2 = 0.$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 10: \ \left.\begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_2 = 0: \ \left.\begin{array}{rr} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow 10u^2 - 4u + 2v = 10$$

$\Rightarrow 10(u - \frac{1}{5})^2 + 2v = \frac{52}{5} \Rightarrow v = -5(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{26}{5}$ Parabel.

□