Universität Siegen
Department Mathematik
D. Wrase

Aufgaben zur Mathematik I,II für Chemiker im WS 16/17+SS17

1. Man bestimme alle $x \in \mathrm{R}$, für welche gilt:

$$a)\quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5 \qquad b)\quad \frac{x-1}{1+x} < x \qquad c)\quad |\frac{x-2}{x+1}| < 1 \qquad .$$

2. Man zeige durch vollständige Induktion

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}(n+2) \qquad , \qquad n \in \mathrm{N} \quad .$$

3. Zu den komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 1 + 2i$ berechne man

$$a)\quad \frac{z_2 z_3}{z_1}\ ,\ b)\sqrt{z_2} \quad .$$

4. Man löse die Gleichungen in C
   a) $z^2 + (2+i)z - 1 + i = 0$,
   c) $|z+i| = \mathrm{Im}(2iz)$.

5. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

   a) mit Hilfe des Gaußalgorithmus.
   b) mit Hilfe der Cramerschen Regel.

6. Man berechne die Determinante zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   berechne man die inverse Matrix.

8. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

$$a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^2+1} x^k \qquad b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!} (x+1)^k$$

9. Gegeben ist das Polynom

$$P : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad , \quad P : x \to P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 \; .$$

a) Mit Hilfe des Hornerschemas berechne man $P(x)$ für $x = 3, \pm 2, \pm 1$.

b) Man zerlege P in irreduzible Faktoren .

10. Man berechne die Grenzwerte

$$a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{\sin^2 x} \qquad b) \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sinh x}$$

$$c) \quad \lim_{x \to 1} (x-1) \cot(\pi x) \; .$$

11. Man berechne das Taylorpolynom $P_2(x)$ zweiten Grades von

$$f : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}, f : x \to ln(\frac{x}{3})$$

bei der Stelle $x_0 = 3$ und schätze die Fehlerfunktion $\Delta(x) = |f(x) - P_3(x)|$ auf dem Intervall $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ ab.

12. Man berechne die Stammfunktionen zu

a) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f : x \to x^3 + 4\cosh(2x)$,

b) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f : x \to xe^{-2x}$,

c) $f : (-1,1) \to \mathrm{R}$, $f : x \to \ln(1-x^2)$,

13. Man berechne die unbestimmten Integrale

$$a) \quad \int x^3 \cos(x^2) \, dx \qquad b) \int \frac{x+1}{x^3+x^2+x+1} \, dx \quad c) \int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \, dx \quad d) \int \frac{\cdot}{x}$$

14. Man berechne die folgenden bestimmten Integrale, sofern sie existieren.

$$a) \quad \int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2-2} \, dx \qquad b) \quad \int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+5x+1} \, dx \; .$$

15. Zu den Vektoren $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (-1, 2, 2)$, $\vec{d} = (2, 4, 1)$, berechne man

a) die Einheitsvektoren $\vec{a}_0$ bzw. $\vec{b}_0$ in Richtung von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$,

b) das Volumen und die Oberfläche des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ aufgespannten Spates ,

c) die Zerlegung des Vektors $\vec{b}$ in seine Komponenten $\vec{b}_1$ in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}_2$ senkrecht zu $\vec{a}$,

16. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (t, 2, 2-t)$, $\vec{d} = (2, 2, -1)$. Man bestimme alle $t \in \mathrm{R}$ für welche

a) das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ aufgespannten Spates gleich 18 ist,

b) der Betrag der Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gleich 3 ist.

c) die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

17. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektorräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} .$$

18. Zu den folgenden Funktionen berechne man alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

$$a)\ f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}\ ,\ f : (x, y) \to x\cos(x - y)\ ,$$

$$b)\ g : \mathrm{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathrm{R}\ ,\ g : (x, y) \to \ln(x^2 + y^2)\ ,$$

$$c)\ h : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ ,\ h : (x, y) \to 2\arctan\frac{y}{x}$$

19. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}\ ,\ f : (x, y) \to x^2 - 4y^2 + 1.$$

a) Man bestimme die Niveaulinien von f .

b) Für den Punkt $(x_0, y_0) = (2, -1)$ bestimme man die Gleichung der Tangentialebene und die Richtungsableitung von f in Richtung von $\vec{a} = (-2, 4)$.

20. Man berechne die relativen und absoluten Extremwerte von

$$f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}\ ,\ f : (x, y) \to xye^{-x^2-y^2}\ ,$$

21. Zu den folgenden Differentialgleichungen bestimme man jeweils die allgemeine Lösung .

$$a)\quad (x+1)y' = xy^2 + x - y^2 - 1 \qquad b)\quad xy' - y = x$$

22. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme .

$$a) \quad y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x, \quad y(0) = 1 \quad b) \quad y' = -\frac{2xy}{y^2 + x^2}, \quad y(1) = 1$$

23. Man bestimme die allgemeine Lösung zu

a) $y''' - y'' - y' + y = x$,

b) $y''' + 5y'' + 3y' - 9y = e^x$.

24. Man löse das Anfangswertproblem

a) $y'' + 2y' + 2y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$,

25. Man löse das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + e^x \end{aligned}$$