6. Aufgabenblatt Math. I ET WS 13/14

1a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n^2}{2^n+6}$ $a_n = \frac{1-n^2}{2^n+6}$ Quotientenkrit. für $n \geq 2$

ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}+6} \cdot \frac{2^n+6}{n^2-1} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - \frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1+6\cdot 2^{-n}}{2+6\cdot 2^{-n}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - \frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+6\cdot 2^{-n}}{2+6\cdot 2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n^2}{2^n+6}$ ist absolut konvergent.

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{3^k}$ $a_k = \binom{2k}{k} \cdot 3^{-k} \Rightarrow$ Quotientenkrit.

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \binom{2k+2}{k+1} 3^{-k-1} \Big/ \binom{2k}{k} 3^{-k} = \frac{1}{3} \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{1}{3} \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2}{3} \frac{2k+1}{k} = \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ Divergenz

c) $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2-3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k = \frac{k+1}{k^2-3}$ alternierende Reihe. Ist a_k monoton fallen für $k \geq 2$?

$a_k - a_{k+1} = \frac{k+1}{k^2-3} - \frac{k+2}{(k+1)^2-3} = \frac{(k+1)[(k+1)^2-3] - (k^2-3)(k+2)}{(k^2-3)[(k+1)^2-3]}$

Wegen $(k+1)[(k+1)^2-3] - (k^2-3)(k+2) = k^2+3k+3 > 0 \Rightarrow$

$a_k - a_{k+1} > 0 \Rightarrow a_k$ monoton fallen und

$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}{1-\frac{3}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{3}{k^2}} = 0$

$\Rightarrow a_k$ monotone Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe konvergent (Leibniz-krit.)

Reihe nicht absolut konvergent, denn es ist

$a_k = \frac{k+1}{k^2-3} > \frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k}$ für $k \geq 2$

und da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ divergent

$\Rightarrow$ Reihe nicht absolut konvergent.

2a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k^2+3} x^k$ $a_k = \frac{e^{-k}}{k^2+3}$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{e^{-k-1}}{e^{-k}} \frac{k^2+3}{(k+1)^2+3} = \frac{1}{e} \frac{k^2+3}{(k+1)^2+3}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e} \frac{1+\frac{3}{k^2}}{(1+\frac{1}{k})^2+\frac{3}{k^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow$ Konvergenzradius $r = e$

Konvergenzbereich $B = \{x \mid |x| < e\}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3} (x+2)^{3k+1}$ $a_{3k+1} = \frac{1}{k^3}$ $k = 0, 1, \ldots$ $a_{3k+2} = 0, a_{3k} = 0$

$\Rightarrow$ Wegen $1 \leq \sqrt[3k+1]{k^3} < \sqrt[3k+1]{(3k+1)^3}$ und $\lim_{k\to\infty} \sqrt[3k+1]{(3k+1)^3} = 1$

folgt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich $B = \{ x \mid |x-2| < 1 \}$

c) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n)!}{(n!)^3} \frac{((n+1)!)^3}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)} = \frac{(n+1)}{2} \frac{1+\frac{1}{n}}{(2+\frac{1}{n})}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty \Rightarrow r = +\infty$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ (bzw $x \in \mathbb{C}$).

d) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{n^{n+2}} \frac{(n+1)^{n+3}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+3}}{n^{n+2}(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = e \Rightarrow$

Konvergenzradius $r = e \Rightarrow B = \{ x \mid |x| < e \}$

3) a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{5}{x^2-x-6} + \frac{1}{3-x} \right) = \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{5}{(x-3)(x+2)} - \frac{1}{x-3} \right)$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{5-x-2}{(x-3)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{2-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)^2(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)^2(2+\sqrt{x})}{4-x}$

$= \lim\limits_{x\to 4} (4-x)(2+\sqrt{x}) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}\,(-5)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}} = -5 \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{4}{x}}} = -\frac{5}{2}$

4 a) Da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh} x}{x} = 1$ ist $f(x)$ durch $f(0) = 1$ auch bei 0 definierbar $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(-x) = \frac{\operatorname{arsinh}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{arsinh} x}{x} = f(x)$

$\Rightarrow f$ gerade

b) Wegen $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln|x| = 0$ ist g durch $g(0) = 0$ auch bei 0 definiert. $\Rightarrow D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(-x) = (-x)^2 \ln|-x| = g(x)$

g gerade

c) $h(x) = \tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x)$ ungerade

d) $w(x) = \arctan(\tan x) = x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

und wegen $x = \arctan_k(\tan x)$ in $\{k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}\}_k$

= und