Übungsklausur in Mathematik I für ET WS 13/14

1. Gegeben sind die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \ , \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \ \textit{und} \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

   a) Bestimmen Sie $t \in \mathrm{R}$ so , dass das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates minimal ist.

   b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathrm{R}$, für welche die Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ den Betrag 2 besitzt.

2. Man bestimme alle $t \in \mathrm{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcccccl} -x & + & (t+1)y & + & tz & = & 2 \\ -x & + & y & + & (2-t)z & = & 1 \\ -(2+t)x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$
parameterabhängige Lösungen besitzt.

3. Bestimmen Sie zu den Potenzreihen
$$a) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)}(x+2)^n \qquad , \quad b) \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}x^k$$
den jeweiligen Konvergenzradius und Konvergenzbereich. Wie groß sollte man n mindestens wählen , damit der Betrag des Reihenrestes $r_n(-\frac{1}{3}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}(-\frac{1}{3})^k$ sicher kleiner als $5 \cdot 10^{-4}$ ist?

4. Stellen Sie die komplexe Zahl $a = -7 + 24i$ in Eulerscher Form (Polarform) dar und berechnen Sie alle vierten Wurzeln aus a .

5. Berechnen Sie die Grenzwerte

   a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^2 x - 1}{\cosh(x-\pi) - 1}$,

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 5})$.

6. Bestimmen Sie zur Funktion
$$f(x) = \ln \sqrt{(x+2)^5}$$
das Taylorpolynom dritten Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 7$ und schätzen Sie den Betrag des Restgliedes $\Delta(x) = |R_3(x)|$ für $6 \le x \le 8$ ab.

Übungsklausur Math. I ET WS 13/14

1a) Volumen $V = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$ $\quad [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} t & 2 & 0 \\ -1 & t & 2 \\ t & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 2 & 0 \\ -1 & t & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3(t^2+2)$

$\Rightarrow V = 3(t^2+2) \Rightarrow V$ minimal für $t=0$.

b) Proj. von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ $\quad \vec{a}_p = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}_p| = \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

$\vec{a}\vec{b} = (t,-1,t)(2,t,2) = 3t \quad |\vec{b}| = \sqrt{8+t^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{|3t|}{\sqrt{8+t^2}} \Rightarrow 32+4t^2 = 9t^2$

$\Rightarrow t^2 = \frac{32}{5} \Rightarrow t = \pm 4\sqrt{\frac{2}{5}}$

2) Koeffizientenmatrix $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & t+1 & t \\ -1 & 1 & 2-t \\ -2-t & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ Notw. Bed. $|A| = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & t+1 & t \\ -1 & 1 & 2-t \\ -2-t & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & t & t \\ -1 & 0 & 2-t \\ -2-t & -t & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & t & t \\ -1 & 0 & 2-t \\ -3-t & 0 & t+3 \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -1 & 2-t \\ -3-t & t+3 \end{vmatrix} = t(t+3)(t-1)$

Also können param. abh. Lösungen nur für $t = 0, 1, -3$ auftreten

$t=0$:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

keine Lsg

$t=1$:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

param. abh. Lsg.

$t=-3$:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

keine Lsg.

$\Rightarrow$ genau für $t=1$ besitzt das LGS parameterabh. Lösungen.

3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)}(x+2)^n \quad a_n = \frac{1-n}{n(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{-n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})} = 1$

Konvergenzrad $r = 1 \quad B = \{x \mid |x+2| < 1\}$

$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} x^k \quad a_k = \frac{2^k}{(k+1)!} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+1)!}{2^k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+2} = 0 \Rightarrow r = +\infty \Rightarrow$ Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent

$g(-\frac{1}{3}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left(-\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{2}{3})^k}{(k+1)!}$ alternierende Reihe

$a_k = \frac{(\frac{2}{3})^k}{(k+1)!} > \frac{(\frac{2}{3})^{k+1}}{(k+2)!} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (Leibniz-Krit) $\Rightarrow r_n(-\frac{1}{3}) < a_{n+1}$

$a_{n+1} = (\frac{2}{3})^{n+1} \frac{1}{(n+2)!} < 5 \cdot 10^{-4}$ ist für $n=3$ erfüllt. (für $n=2$ noch nicht)

4.) $a = -7+24i$

$|a| = \sqrt{7^2+24^2} = 25 \quad \arg(-7+24i) = -\arctan(\frac{24}{7}) + \pi$

$\Rightarrow -7+24i = 25\, e^{i(\pi - \arctan\frac{24}{7} + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ 4. Wurzel aus a

$\Rightarrow z_k = \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{25}\, e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arctan\frac{24}{7})} \cdot \omega_{4k} \quad \omega_{4,0} = 1 \quad \omega_{4,1} = i, \omega_{4,2} = -1$

$\omega_{4,3} = -i \quad \Rightarrow z_0 = 2+i, \; z_1 = -1+2i \quad z_2 = -2-i \quad z_3 = 1-2i$

5) a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2 x - 1}{\cosh(x-\pi) - 1} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{-2\cos x \sin x}{\sinh(x-\pi)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{2(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\cosh(x-\pi)} = -2$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2-3x+5}) \frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{x+\sqrt{x^2-3x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x+\sqrt{x^2-3x+5}} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-1}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - 5x^{-1}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{2}$

6) $f(x) = \ln(x+2)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\ln(x+2) \quad , x > -2$

$P_3(x) = f(7) + f'(7)(x-7) + \frac{f''(7)}{2}(x-7)^2 + \frac{1}{6}f'''(7)(x-7)^3$

$f(7) = \frac{5}{2}\ln 9 = 5\ln 3 \qquad f'(x) = \frac{5}{2}\frac{1}{x+2} \quad f'(7) = \frac{5}{18} \; , f''(x) = -\frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2}$

$f''(2) = -\frac{5}{162} \quad , f'''(x) = \frac{5}{(x+2)^3} = \frac{5}{729}$

$\Rightarrow P_3(x) = 5\ln 3 + \frac{5}{18}(x-7) - \frac{5}{324}(x-7)^2 + \frac{5}{4374}(x-7)^3$

$\Delta(x) = |R_3(x)| = \left| \frac{(x-7)^4}{4!} f^{(4)}(7+\delta(x-7)) \right| \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-15}{(x+7)^4} \quad 0<\delta<1$

$|x-7| \leq 1 \qquad \Rightarrow \Delta(x) \leq \frac{1}{24}\frac{15}{(9+\delta(x-7))^4} \leq \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8^4} \leq 2\cdot 10^{-3}$