Übungsklausur in Mathematik für Chemiker am 09.07.2020

Name:	Vorname:	Matr.Nr.:
Punkte:	Note:	Bonuspunkte:

1.Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$a) \quad \int x^3 \ln(x)\ dx \qquad b) \quad \int \frac{x}{x^2 - 3x - 10}\ dx$$

[4+4]

2.Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$a) \quad \int_0^2 x \sin(2x)\ dx \qquad b) \quad \int_{-2}^2 \sin(x^3)\ dx\ .$$

[4+2]

3.Gegeben ist die Funktion

$$f : R^2 \to R \quad , \quad f : (x, y) \to x^2 - 4x + y^2 + xy.$$

a)Für den Punkt $(x_0, y_0) = (2, -2)$ bestimme man die Gleichung der Tangentialebene an das Schaubild von f und die Richtungsableitung von f in Richtung von $\vec{a} = (-2, 3)$.
b) Man bestimme die Extremwerte von f . **[4+4]**

4. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme

$$a) \quad (x+1)y' = 2xy^2 + 2x\ , \quad y(0) = 1 \qquad b) \quad 2y - xy' = x^3\ , \quad y(1) = 0$$

.

[4+4]

5.Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{x}{y^2}dy + (e^x - 2x - \frac{1}{y})dx = 0\ .$$

a)Man prüfe, ob die Differenzialgleichung exakt ist. **[2]**

b)Man bestimme ihre allgemeine Lösung in impliziter Form. **[4]**

c)Man bestimme die Lösung der Differenzialgleichung, welche die Anfangsbedingung $y(1) = e^{-1}$ erfüllt, in expliziter Form. **[2]**

6.Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$$

[8]

7.Man löse das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 + e^{-x} \end{aligned}$$

[8]

[ ]: Maximal erreichbare Punktzahl.

Übungsklausur Math. II Chemie 09.07.2020

1) a) Partielle Integration: $J = \int x^3 \ln x \, dx$ $u' = x^3 \quad v = \ln x$

$u = \frac{1}{4}x^4 \quad v' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow J = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c$

b) $J = \int \frac{x}{x^2-3x-10} dx$ Partialbruchzerlegung $x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+10} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \quad x_1 = 5, x_2 = -2 \Rightarrow J = \int \frac{x}{(x-5)(x+2)} dx$

$\frac{x}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+2} \Rightarrow x = a(x+2) + b(x-5) \Rightarrow a = \frac{5}{7}, b = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow J = \frac{1}{7}\int \left(\frac{2}{x-5} + \frac{5}{x+2}\right) dx = \frac{1}{7}\left(2 \ln|x-5| + 5 \ln|x+2|\right) + c \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$

2) a) Part. Int. $J = \int_0^2 x \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} x \cos(2x) \Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \cos 2x \, dx$

$u = x \quad v' = \sin(2x)$

$u' = 1 \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$\Rightarrow J = -(-\cos(4)) + \frac{1}{4} \sin(2x) \Big|_0^2 = -\cos 4 + \frac{1}{4} \sin(4)$

b) Da $\sin(x^3)$ eine ungerade Funktion ist $\Rightarrow \int_{-2}^{2} \sin(x^3) dx = 0$.

3) a) Es ist $f(2,-2) = -4 \quad \frac{\partial}{\partial x} f = 2x + y - 4, \quad \frac{\partial}{\partial y} f = 2y + x$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = (2x + y - 4, 2y + x) \quad \operatorname{grad} f(2,-2) = (-2, -2)$

$\Rightarrow$ Tangentialebene: $z - f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(2,-2)(x-2, y+2) \Rightarrow z + 4 = -2(x-2) - 2(y+2)$

Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(2,-2) = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \operatorname{grad} f(2,-2) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3) \cdot (-2,-2) = \frac{-2}{\sqrt{13}}$

b) kritische Stellen: $\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{matrix} \Rightarrow -3y = 4$

$\Rightarrow y = -\frac{4}{3} \quad x = -2y = \frac{8}{3} \Rightarrow$ krit. Punkt. $\frac{1}{3}(8,-4)$

Wegen $f_{xx} = 2, f_{yy} = 2$ und $f_{xy} = f_{yx} = 1 \Rightarrow H(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det H = 3 > 0 \quad f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ bei $\frac{1}{3}(8,-4)$ besitzt f ein Minimum.

4) a) $(x+1) y' = 2xy^2 + 2x = 2x(y^2+1)$ ist trennbar.

$\Rightarrow (x+1)\frac{dy}{dx} = 2x(y^2+1) \Rightarrow \frac{dy}{\underbrace{y^2+1}_{\neq 0}} = \frac{2x}{x+1} dy \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = 2\int \frac{x^{(+1-1)}}{x+1} dx$

$\Rightarrow \arctan y = 2\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 2(x - \ln|x+1|) + c$

$\Rightarrow y = \tan(2(x - \ln|x+1|) + c) \quad y(0) = \tan c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

$y = \tan\left(2x - \ln(x+1)^2 + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $2y - xy' = x^3 \Rightarrow y' - \frac{2}{x} y = -x^2$ Lineare Dgl. 1. Ordnung.

$\Rightarrow$ Lösungsformel $y = e^{-\int_1^x -\frac{2}{t} dt}\left[-\int_1^x t^2 \cdot e^{\int_1^t -\frac{2}{t} dt} dt + 0\right]$

$\Rightarrow y = e^{2 \ln t \big|_1^x}\left(-\int_1^x t^2 \cdot \frac{1}{t^2} dt\right) = x^2 [1 - x]$

5) a) $\underbrace{\frac{x}{y^2}}_{=Q} dy + (\underbrace{e^x - 2x - \frac{1}{y}}_{P}) dx = 0 \quad P = e^x - 2x - \frac{1}{y}, \; Q = \frac{x}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} P = \frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x} Q \Rightarrow$ Dgl. ist exakt.

b) Zu bestimmen f mit $\frac{\partial}{\partial x} f = P \wedge \frac{\partial}{\partial y} f = Q$

$\Rightarrow f(x,y) = \int Q \, dy + \varphi(x) = \int \frac{x}{y^2} dy + \varphi(x) = \varphi(x) - \frac{x}{y}$

$\frac{\partial}{\partial x} f = \varphi'(x) - \frac{1}{y} = P = e^x - 2x - \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi'(x) = e^x - 2x \Rightarrow \varphi(x) = e^x - x^2$

$\Rightarrow f(x,y) = e^x - x^2 - \frac{x}{y}$, allgem. Lsg. der Dgl. ist

$f(x,y) = c \Rightarrow e^x - x^2 - \frac{x}{y} = c$

c) $y(1) = e^{-1} \Rightarrow e^1 - 1 - \frac{1}{e^{-1}} = -1 = c \Rightarrow e^x - x^2 + 1 = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow y = \frac{x}{e^x + 1 - x^2}$

6) $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$ ist eine inhomogene lin. Dgl. 2. Ordnung.

I Schritt Lösung der homogenen Dgl. $y'' + 3y' + 2y = 0$ durch Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ Char. Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

II Bestimmung einer partikulären Lösung y_p durch Ansatz: Da $s(x) = e^{2x}$ und 2 keine Nullstelle der char. Gl. ist $\Rightarrow y_p = \alpha e^{2x}$, $y_p' = 2\alpha e^{2x}$, $y_p'' = 4\alpha e^{2x}$

$\Rightarrow$ (in die inhom. Dgl. y_p eingesetzt):

$\alpha e^{2x}[4 + 3 \cdot 2 + 2] = e^{2x} \Rightarrow 12\alpha = 1 \quad \alpha = \frac{1}{12} \quad y_p = \frac{1}{12} e^{2x}$

$\Rightarrow$ allg. Lösung $y_A = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{12} e^{2x}$.

7) Lin. Dgl. System $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 + e^{-x} \end{aligned}$; in Matrizen-Form

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \qquad \vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$

I Lösung des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ durch Ansatz

$y = \vec{a} e^{\lambda x} \Rightarrow$ Eigenwertproblem $A\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad \vec{a} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$

Eigenvektorräume $(A - \lambda_k E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hom. lin. Gls.

$\lambda_1 = 3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \lambda_2 = -2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{y}_h = c_1 e^{\lambda_1 x}\vec{a}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\vec{a}_2 = c_1 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

II Bestimmung eines $\vec{y}_p$

Da $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$ ist und -1 kein Eigenwert von A

$\Rightarrow \vec{y}_p = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x} \Rightarrow y_p' = -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x}$ in $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ eingesetzt

$\Rightarrow -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \Rightarrow -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 + 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{4} \quad \alpha_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-x}$

$\Rightarrow \vec{y}_A = \vec{y}_h + \vec{y}_p = c_1 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-x}$.