

Aufgaben zu Mathematik III Bauing. Teil DGLn , SS15

1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und weisen Sie nach, dass die Lösungen eindeutig bestimmt sind (Satz von Picard-Lindelöf) .

$$a) \quad (x-1)y' = y - 2x + 2, \quad y(0) = 1$$

$$b) \quad xyy' = y^2 + x^2, \quad y(1) = 1$$

$$c) \quad (x^2 - 4)y' = xy^2 + x + 2y^2 + 2, \quad y(0) = 0$$

2. Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) = 2xy, \quad y(0) = 1$$

- a) die iterative Funktionenfolge

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^x f(t, y_n(t)) dt, \quad y_0(x) \equiv 1$$

sowie ihren Grenzwert $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$,

- b) die Lösung direkt.

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$yu_x + xu_y = yu, \quad u(0, y) = e^{y^2}.$$

4. Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = f(x)g(y)$ das Randwertproblem

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u(0, y) = u(2\pi, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \sin(2x)$$

für das Rechteck $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$.

5. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Reihenansatz .

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1, \quad (\text{die ersten 4 nichtverschwindenden Koeffizienten genügen}).$$

6. Untersuchen Sie folgenden Randwertprobleme auf Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

$$a) \quad y'' = y' + 1, \quad y(0) = 0, y'(1) = 1 \quad b) \quad x^2 y'' + 4y = x, \quad y(1) = 0, y(e^{2\pi}) = 0$$

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy + 2x, \quad y(0) = 0.$$

Berechnen Sie dann eine Näherung für $y(0.1)$ indem Sie

das Runge-Kutta-Verfahren

mit Schrittweite $h = 0.1$ verwenden.

Vergleichen Sie die exakte Lösung $y(0.1)$ mit Näherungslösung.